Aufgaben zum Vorkurs Mathematik

für Mathematiker
vor dem WS 2019/20

Timo Enger, Peter Pfaffelhuber
Universität Freiburg

17. Oktober 2019

Falls Sie diese Aufgaben entdecken, bevor der Vorkurs beginnt: Wie wäre es damit, wenn Sie sich schon mal an eine der Knobelaufgaben versuchen würden? Diese werden als Hausaufgabe für die ganze Woche am Freitag nachmittag in den Übungen besprochen. Die restlichen Aufgaben werden als Präsenzübung in den Übungen von Montag bis Donnerstag nachmittag besprochen.

Pflichtaufgaben sind mit * markiert.

Knobelaufgabe für die ganze Woche

1. Seien α und n natürliche Zahlen. Wir betrachten die Aussage:

   $$\mathcal{A}(n,\alpha): \text{ Zwischen } 10\alpha \text{ und } 10\alpha+100 \text{ liegen nicht mehr als } n \text{ Primzahlen..}$$

   Finden Sie n so klein wie möglich ist und einen Beweis dafür, dass $\mathcal{A}(n,\alpha)$ für alle $\alpha > 0$ gilt.

   Hinweis: Als ersten Schritt finden Sie am besten einen Beweis dafür, dass $\mathcal{A}(50,\alpha)$ für alle $\alpha > 1$ gilt.

   Hinweis: Hier sind alle Primzahlen unter 200:
   2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
   Für $\alpha = 2$ ergeben sich die Primzahlen $23, ...113$, also 22 Stück.

2. Fünf Häuser stehen in einer Reihe und tragen, von links nach rechts gelesen, die Hausnummern 1 bis 5. Jedes Haus hat eine andere Farbe. In jedem Haus wohnt eine einzige Familie. Die Nationalitäten der Familien sind verschieden. Jede Familie bevorzugt ein bestimm- tes Getränk, eine bestimmte Speise, und hält ein bestimmtes Haustier.

   Die Farben sind: blau, gelb, grün, rot, weiss.
   Die Nationalitäten sind: Deutschland, Schweiz, Frankreich, Österreich, Polen.
   Die Getränke sind: Bier, Kaffee, Milch, Tee, Wasser.
   Die Speisen sind: Kartoffelauflauf, Nudeln, Reis, Gemüsesuppe, Rindsfilet.
   Die Haustiere sind: Fisch, Hund, Katze, Pferd, Vogel.

Folgendes ist bekannt:

(a) Die französische Familie wohnt im roten Haus.
(b) Die polnische Familie hält einen Hund.
(c) Die Familie aus der Schweiz trinkt gerne Tee.
(d) Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
(e) Die Familie im grünen Haus trinkt gerne Kaffee.
(f) Die Liebhaber von Reis halten einen Vogel.
(g) Die Familie im mittleren Haus trinkt gerne Milch.
(h) Die Familie im gelben Haus isst gerne Kartoffelauflauf.
(i) Die Nudel-Liebhaber wohnen neben den Katzenhaltern.
(j) Die Pferdebesitzer wohnen neben den Liebhabern von Kartoffelauflauf.
(k) Die Liebhaber von Rindsfilets trinken gerne Bier.
(l) Die österreichische Familie wohnt im ersten Haus.
(m) Die österreichische Familie wohnt neben dem blauen Haus.
(n) Die deutsche Familie mag Gemüsesuppe.
(o) Die Nudel-Liebhaber haben Nachbarn, die gerne Wasser trinken.

Wem gehört der Fisch?
(Antwort mit Herleitung, d.h. einer Auflistung aller logischen Schlussfolgerungen.)

3. Zwei Lösungen des 4×4-Sudokus (siehe auch Abschnitt 4.3 heißen *im wesentlichen gleich*, wenn man beide durch Hintereinanderausführung folgender Operationen ineinander überführen kann:

- Vertauschen der ersten beiden, oder letzten beiden Zeilen;
- Vertauschen der ersten beiden, oder letzten beiden Reihen;
- Spiegelung an einer der beiden Winkelhalbierenden;
- Vertauschung der Zahlen 1,2,3,4 untereinander.

Sind zwei Lösungen nicht im wesentlichen gleich, so heißen sie *im wesentlichen verschieden.*

(a) Sind folgende Lösungen im wesentlichen gleich oder verschieden?

4	3	2	1
2	1	4	3
1	2	3	4
3	4	1	2

4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4

(b) Wieviele im wesentlichen verschiedene Lösungen des 4×4-Sudokus gibt es?

Rechenaufgaben

1.* Untersuchen Sie im folgenden wann die Terme definiert sind und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $\dfrac{2\alpha+\alpha^2-1}{2\alpha^2-2}$

(b) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)}+1$

(c) $\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}\dfrac{-\beta}{\gamma\alpha}\dfrac{(\gamma-\beta)\gamma}{\beta}$

(d) $\dfrac{\alpha^{\zeta+2}\beta^{\eta}\gamma^{\theta-1}}{\gamma^{-1}\alpha^2\beta^{\eta-2}}$

(e) $\dfrac{1}{\alpha^{\eta}\beta^{\eta-4}}-\dfrac{4}{\alpha^{\eta-1}\beta^{\eta-3}}+\dfrac{6}{(\alpha\beta)^{\eta-2}}-\dfrac{4}{\alpha^{\eta-3}\beta^{\eta-1}}+\dfrac{1}{\alpha^{\eta-4}\beta^{\eta}}$

(f) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{4\alpha^2}{\beta^2}\right)^{\theta}}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{16\alpha}{\gamma^3\beta}\right)^{\theta}}$

(g) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}$

(h) $\sqrt[2]{\alpha^6\sqrt[5]{\alpha^4\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt[4]{\alpha}}}}$

(i) $\frac{1}{2}\ln(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2-\beta^2)+\frac{1}{2}\ln(\alpha-\beta)$

(j) $\ln(\ln(\ln(\ln(e^{e^e}))))$

2.* Für welche $\mu,\nu\in\mathbb{R}$ gilt $(\mu,\nu)^2=\mu^2+\nu^2$?

3.* Für welche $\xi,\eta,\lambda,\rho\in\mathbb{R}$ gilt
$$\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\rho}=\frac{\xi+\eta}{\lambda+\rho}?$$

4.* Berechnen Sie die Ableitung von $x\mapsto x^x$.

5.* Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit differnenzierbarer Umkehrfunktion f^{-1}. Berechnen sie allgemein die Ableitung von f^{-1}.

Aufgaben zu Kapitel 2

1.* Geben Sie jeweils ein Element aus $\mathbb{N}_0\setminus\mathbb{N}$, aus $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$, aus $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ an.

2.* Seien $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ Aussagen, die von der freien Variablen x abhängen. Welche Gleichheiten sind richtig, welche falsch. In welchen Fällen gilt wenigstens "$\Rightarrow$" oder "$\Leftarrow$" anstatt "$=$"?

(a) $((\exists x:\mathcal{A}(x))\wedge(\exists x:\mathcal{B}(x)))=(\exists x:\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{B}(x))$

(b) $((\forall x:\mathcal{A}(x))\wedge(\forall x:\mathcal{B}(x)))=(\forall x:\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{B}(x))$

(c) $((\exists x:\mathcal{A}(x))\vee(\exists x:\mathcal{B}(x)))=(\exists x:\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B}(x))$

(d) $((\forall x:\mathcal{A}(x))\vee(\forall x:\mathcal{B}(x)))=(\forall x:\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B}(x))$

3.* Negieren Sie folgende Aussagen:

$$\exists a,b,c,n\in\mathbb{N}:(n>2)\wedge(a^n+b^n=c^n),$$
$$\forall a\in\{2,3,4,...\}\ \exists p,q\in\mathbb{N}:(p,q\text{ prim})\wedge(2a=p+q),$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists p\in\mathbb{N}:(p>n)\wedge(p\text{ prim})\wedge(p+2\text{ prim}).$$

4. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie

$$A \setminus (B \setminus A) = A,$$
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C),$$
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

5. Seien A, B Mengen. Zeigen, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\text{(i) } A \subseteq B \qquad \text{(ii) } A \cap B = A \qquad \text{(iii) } A \cup B = B.$$

6.* Erstellen Sie ein Venn-Diagramm für das Haus der Vierecke. Es gibt folgende spezielle Vierecke: Quadrat, Rechteck, Drachenviereck, Trapez, gleichschenkliges Trapez, Parallelogramm, Raute, Sehnenviereck[1], Tangentenviereck[2].

Aufgaben zu Kapitel 3

1.* Seien $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Begründen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.$$

2.* Was ist $\sum_{i=m}^{n} 1$?

3.* Ein $x \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, falls $2|x$. Ist 0 eine gerade Zahl? Wie folgt das aus der Definition von Teilbarkeit?

4.* Sei $x \in \mathbb{N}$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k$. Zeigen Sie:

$$2|x \iff 2|a_0, \qquad 5|x \iff 5|a_0, \qquad 4|x \iff 4|(10a_1 + a_0).$$

5. Sei $x \in \mathbb{Z}_+$ mit Dezimaldarstellung $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ und $y = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1}$ die Zahl, die entsteht, wenn man die letzte Ziffer von x wegstreicht. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} 7|x &\iff 7|(5a_0 + z). \\ 13|x &\iff 13|(4a_0 + z). \\ 17|x &\iff 17|(5a_0 - z). \\ 19|x &\iff 19|(2a_0 + z). \\ 23|x &\iff 23|(7a_0 + z). \\ 29|x &\iff 29|(3a_0 + z). \end{aligned}$$

6. Drei Primzahlen p, q und r bilden ein Primzahldrilling, wenn der Abstand zwischen p und q bzw. der Abstand zwischen q und r genau 2 beträgt. Zeigen Sie, dass nur $(3, 5, 7)$ ein Primzahldrilling bilden (d.h. es gibt keine weiteren Primzahldrillinge)

[1] Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Ecken auf einem Kreis liegen.

[2] Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, bei dem es einen Kreis gibt, der alle vier Seiten berührt.

Aufgaben zu Kapitel 4

1.* Beweisen Sie Lemma 3.3.

Aufgaben zu Kapitel 5

1. Sei $0 < x < 1$. Ist $(x^n)_{n=1,2,\ldots}$ eine monotone, beschränkte Folge? Wenn ja, wie lautet ihr Grenzwert?

2. Sei $z \in \mathbb{Q}$. Finden Sie eine Folge rationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{z}$ konvergiert.
   Hinweis: Versuchen Sie es doch mal mit $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{z}{x_n}\right)$.

3.* Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 5.3.

Lösungen

Knobelaufgabe für die ganze Woche

1. Behauptung: $\mathcal{A}(24, \alpha)$ gilt für alle $\alpha > 0$. Denn:
   Zwischen 10α und $10\alpha + 100$ liegen 101 Zahlen. Davon sind 51 Zahlen gerade, d.h. es bleiben noch 50 mögliche Primzahlen. Von diesen 50 Zahlen sind mindestens 16 Zahlen durch 3 aber nicht durch 2 teilbar. Bleiben noch 34 mögliche Primzahlen. Von diesen sind mindestens 6 Zahlen durch 5 teilbar und nicht durch 2 oder 3. Bleiben also noch 28 Zahlen übrig von denen nochmal mindestens 4 Zahlen durch 7 teilbar sind und nicht durch $2, 3, 5$. Insgesamt können also höchstens 24 Primzahlen zwischen dieser Spanne geben.

2. $(l) + (m) \Rightarrow (1)$: Das zweite Haus ist blau.
   $(e) + (g) + (d) + (1) \Rightarrow (2)$: Das vierte Haus ist grün.
   $(d) + (2) \Rightarrow (3)$: Das fünfte haus ist weiß.
   $(2) + (e) \Rightarrow (4)$: Die Familie im vierten Haus trinkt gerne Kaffee.
   $(l) + (a) + (1) + (2) + (3) \Rightarrow (5)$: Die dritte Haus ist rot.
   $(1) + (2) + (3) + (5) \Rightarrow (6)$: Das erste Haus ist gelb.
   $(a) + (5) \Rightarrow (7)$: Die französische Familie wohnt im dritten Haus.
   $(h) + (6) \Rightarrow (8)$: Die Familie im ersten haus isst gerne Kartoffelauflauf.
   $(j) + (8) \Rightarrow (9)$: Die Pferdebesitzer wohnen im zweiten Haus.
   $(g) + (4) + (k) + (8) + (c) \Rightarrow (10)$: Die Familie im ersten Haus trinkt gerne Wasser.
   $(o) + (10) \Rightarrow (11)$: Die Familie im zweiten Haus mag Nudeln.
   $(10) + (11) + (g) + (4) + (k) \Rightarrow (12)$: Die Familie im letzten Haus mag Bier.
   $(12) + (k) \Rightarrow (13)$: Die Familie im letzten Haus mag Rindsfilet.
   $(12) + (4) + (10) + (g) \Rightarrow (14)$: Die Familie im zweiten Haus mag Tee.
   $(14) + (c) \Rightarrow (15)$: Die Familie aus der Schweiz wohnt im zweiten Haus.
   $(15) + (l) + (7) + (13) + (n) \Rightarrow (16)$: Die deutsche Familie wohnt im vierten Haus.
   $(16) + (n) \Rightarrow (17)$: Die Familie im vierten Haus mag Gemüsesuppe.
   $(16) + (15) + (l) + (7) \Rightarrow (18)$: Die polnische Familie wohnt im letzten Haus.
   $(8) + (11) + (13) + (17) \Rightarrow (19)$: Die Familie im dritten Haus mag Reis.
   $(18) + (b) \Rightarrow (20)$: Die Familie im letzten Haus hält einen Hund.
   $(19) + (f) \Rightarrow (21)$: Die Familie im dritten Haus halten einen Vogel.
   $(21) + (i) + (11) \Rightarrow (22)$: Die Familie im ersten haus hat Katzen.
   $(22) + (21) + (20) + (9) \Rightarrow (23)$: Der Fisch gehört der Familie im vierten Haus.

3. Man kann zwei Lösungen immer so durch Zahlenvertauschungen ineinander überführen, dass im linken oberen Quadrat die Zahlen in derselben Reihenfolge auftreten. Deshalb können wir annehmen, dass das linke obere Quadrat mit $\boxed{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}}$ ausgefüllt ist. Nun müssen in der ersten Zeile noch die Zahlen 3, 4 und in der ersten Spalte die Zahlen 2, 4 eingetragen werden. Da man diese Möglichkeiten durch Spalten- und Zeilenvertauschungen ineinander überführen kann, brauchen wir nur die Lösung

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

anzusehen. Betrachten wir nun die linke obere Ecke des rechten unteren Quadrats. Diese muss eine 4 enthalten. Und wenn man jetzt im rechten oberen Quadrat die beiden Möglichkeiten einträgt, erhält man

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Nun sind die mittlere und rechte Lösug im wesentlich gleich. Dies sieht man, wenn man eine der beiden an der Diagonalen von links oben nach rechts unten spiegelt und 2 und 3 vertauscht. Damit gibt es zwei im wesentlichen verschiedene Lösungen.

Rechenaufgaben für die ganze Woche

1. (a) $\dfrac{\alpha}{\alpha^2-1}+\dfrac{1}{2}$
   (b) $\dfrac{\beta}{\alpha}+2$
   (c) 1
   (d) $\alpha^{\zeta}\beta^2\gamma^{\theta}$
   (e) $\dfrac{(\beta-\alpha)^4}{\alpha^{\eta}\beta^{\eta}}$
   (f) $\dfrac{\alpha^{\theta}}{(\beta\gamma)^{\theta}}$
   (g) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta}$
   (h) $\alpha^{\frac{139}{40}}$
   (i) 0
   (j) 0

2. Es gilt $(\mu+\nu)^2=\mu^2+2\mu\nu+\nu^2$. Damit gilt

$$(\mu+\nu)^2=\mu^2+\nu^2 \Leftrightarrow (\mu=0)\vee(\nu=0).$$

3. Es gilt

$$\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\rho}=\frac{\xi\rho+\eta\lambda}{\lambda\rho}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\rho}=\frac{\xi+\eta}{\lambda+\rho} \\ \Leftrightarrow\ & (\xi\rho+\eta\lambda)(\lambda+\rho)=(\xi+\eta)\lambda\rho \\ \Leftrightarrow\ & \xi\rho^2=-\eta\lambda^2. \end{aligned}$$

4. Betrachte also die Funktion $f(x)=x^x=e^{\ln(x)x}$. Damit erhalten wir mit Produkt und Kettenregel

$$f'(x)=(1+\ln(x))e^{\ln(x)x}=(1+\ln(x))x^x.$$

5. Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist gilt $f(f^{-1}(x))=x$, für alle $x\in\mathbb{R}$. Mit Kettenregel erhalten wir dann

$$f^{-1\prime}(x)\cdot f'(f^{-1}(x))=1,$$

was äquivalent ist zu

$$f^{-1\prime}(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Aufgaben zu Kapitel 2

1. Sollte klar sein.

2. Wir geben hier Gegenbeispiele an falls "=" nicht gilt.

   (a) Hier gilt nur "$\Leftarrow$". Denn sei $\mathcal{A}(x)=(x\in\mathbb{Z})\wedge(x<0)$ und sei $\mathcal{B}(x)=(x\in\mathbb{Z})\wedge(x>0)$. Dann gilt offensichtlich die linke Seite aber nicht die rechte Seite.
   (b) Hier gilt offensichtlich "=".
   (c) Hier gilt offensichtlich "=".

(d) Hier gilt nur "$\Rightarrow$". Denn sei $\mathcal{A}(x) = (x \notin \mathbb{Z}) \vee ((x \in \mathbb{Z}) \wedge (x < 0))$ und sei $\mathcal{B}(x) = (x \notin \mathbb{Z}) \vee ((x \in \mathbb{Z}) \wedge (x \geq 0))$. Dann gilt offensichtlich die rechte Seite aber nicht die linke Seite.

3. Dies sind bekannte Vermutungen (Große Fermatsche Satz, Goldbach, Primzahlzwillinge)

   (a) $\forall a, b, c, n \in \mathbb{N} : (n \leq 2) \vee (a^n + b^n \neq c^n)$,

   (b) $\exists a \in \{2, 3, 4, \dots\} \forall p, q \in \mathbb{N} : (p, q \text{ nicht prim}) \vee (2a \neq p + q)$,

   (c) $\exists n \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} : (p \leq n) \vee (p \text{ nicht prim}) \vee (p + 2 \text{ nicht prim})$.

4. Wir zeigen hier jeweils "$\subset$" und "$\supset$" gleichzeitig.

   (a) $(x \in A \setminus (B \setminus A)) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \setminus A) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \in A))$
   $\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in A)) \Leftrightarrow (x \in A)$.

   (b) $(x \in (A \setminus B) \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge (x \notin C)$
   $\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \setminus (B \cup C))$.

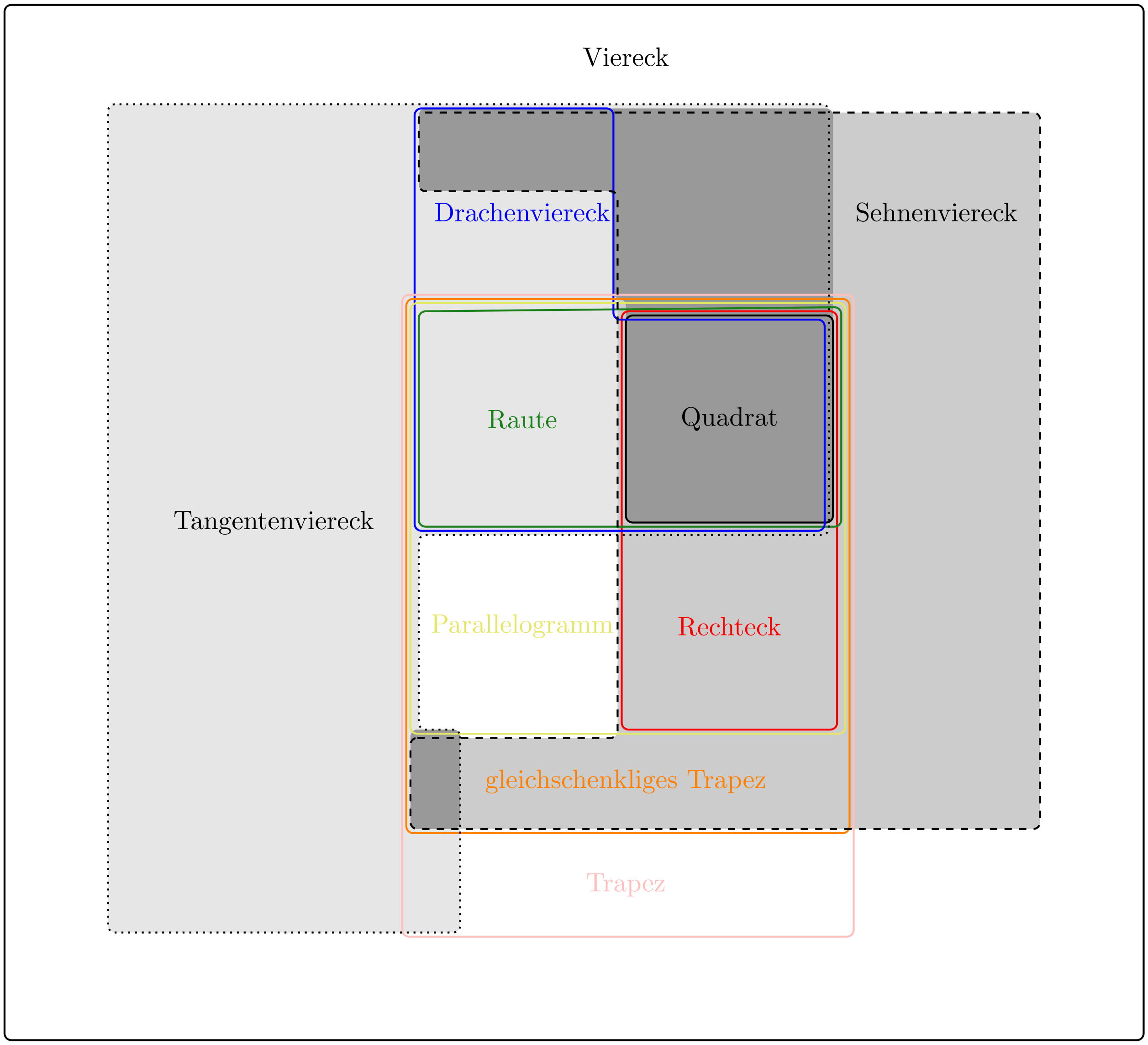
   (c) $(x \in A \setminus (B \setminus C)) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \vee (x \in C))$
   $\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow (x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C))$.

5. Wir wollen hier einen Ringschluss machen.

(i)$\Rightarrow$(ii) "$\subset$" ist klar nach Definition.
"$\supset$": Sei $x \in A$. Dann folgt mit (i) $x \in B$, womit dann $x \in A \cap B$ gilt.

(ii)$\Rightarrow$(iii) "$\supset$" ist klar nach Definition.
"$\subset$": Sei also $x \in A \cup B$. Dann gilt $(x \in A) \vee (x \in B)$. Mit (ii) folgern wir $(x \in A \cap B) \vee (x \in B) \Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (x \in B) \Rightarrow (x \in B)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Sei also $x \in A$. Dann gilt trivialerweise auch $x \in A \cup B$ und damit nach (iii) $x \in B$.

6. 

Aufgaben zu Kapitel 3

1. Stichwort ist hier das Kommutativgesetz.
2. Wir brauchen hier eine Fallunterscheidung.

$$\sum_{i=m}^{n} 1 = \begin{cases} n-m+1, & n \geq m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

3. 0 ist eine gerade Zahl denn $0 \cdot 2 = 0$ und $0 \in \mathbb{Z}$, somit gilt $2|0$.
4. Wir werden modulo anwenden.
   (a) Es gilt $2|x \Leftrightarrow x = 0 \mod 2$. Sei also $x = 0 \mod 2$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{m} a_k 10^k = 0 \mod 2$. Weil $10 = 0 \mod 2$ erhalten wir $\sum_{k=0}^{m} a_k 10^k = a_0 \stackrel{!}{=} 0 \mod 2$ und damit folgt $2|a_0$ (dies war sogar eine Äquivalenz!)

(b) Völlig analog zum ersten Teil da $10 = 0 \mod 5$.

(c) Wir wissen $4|100$ und damit gilt $100 = 0 \mod 4$. Somit erhalten wir $\sum_{k=0}^{m} a_k 10^k = 10a_1 + a_0 \mod 4$ woraus die Aussage folgt.

5. Wir werden wie in der letzten Aufgabe mit modulo argumentieren.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} 5a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1} &= 0 \mod 7 \\ \Leftrightarrow\ 5a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 3^{k-1} &= 0 \mod 7 \\ \Leftrightarrow\ 15a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 3^{k} &= 0 \mod 7 \\ \Leftrightarrow\ a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 3^{k} &= 0 \mod 7 \\ \Leftrightarrow\ x &= 0 \mod 7 \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} 4a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1} &= 0 \mod 13 \\ \Leftrightarrow\ 40a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k} &= 0 \mod 13 \\ \Leftrightarrow\ a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k} &= 0 \mod 13 \\ \Leftrightarrow\ x &= 0 \mod 13 \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} 5a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k-1} &= 0 \mod 17 \\ \Leftrightarrow\ -50a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k} &= 0 \mod 17 \\ \Leftrightarrow\ a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{k} &= 0 \mod 17 \\ \Leftrightarrow\ x &= 0 \mod 17 \end{aligned}$$

(d) analog

(e) analog

(f) analog

6. Zunächst ist klar, dass man jede natürliche Zahl als $3k + a$ darstellen kann mit $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \{0, 1, 2\}$. Wir müssen also nur die drei Fälle durchgehen. Ist $p = 3k + 0$ mit $k > 2$ dann gilt schon $3|p$ also Widerspruch. Gilt $p = 3k + 1$ mit $k > 1$ so gilt $3|q = 3k + 3 = 3(k + 1)$ also Widerspruch. Gilt zuletzt $p = 3k + 2$ mit $k > 1$ so gilt $3|r = 3k + 6 = 3(k + 2)$ also ebenfalls ein Widespruch zu p, q, r sind Primzahlen.

Aufgaben zu Kapitel 4

1. 4.1: Beweis von Lemma 3.3. Sei $x \in \mathbb{N}$. Existenz: Sei a_0 minimal, so dass $10|(x - a_0)$. Dann ist $a_0 \in \{0, ..., 9\}$. Betrachte nun $x_1 := (x - a_0)/10$. Nun ist a_1 minimal, so dass $10|(y - a_1)$ etc. Das Verfahren bricht ab, wenn $x_m = a_m$. Es gilt $x = 10x_1 + a_0 = 10(10x_2 + a_1) + a_0 = \cdots = a_m 10^m + \cdots + a_0$ und die Existenz ist gezeigt.

   Eindeutigkeit: Wir bemerken, dass für $x = \sum a_k 10^k$ notwendigerweise $a_0 := \min\{a : 10|(x - a)\}$ gilt. Dies bestätigt die Eindeutigkeit von a_0. Analog für die anderen Stellen.

Aufgaben zu Kapitel 5

1. Die Folge $(x^n)_{n=1,2...}$ ist monoton fallend, denn $x^{n+1} = x^n \cdot x \overset{x<1}{<} x^n$. Sie ist ebenfalls nach unten beschränkt durch -1, denn $x > 0$. Für die Berechnung des Grenzwertes stellen wir zunächst fest, dass $y := \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} x^{n+1}$. Damit erhalten wir $y = y \cdot x$, womit $y = 0$ folgt, da $x \neq 1$.

2. Sei also die Folge $(x_n)_{n=1,2,...}$ gegeben durch die Rekursion $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{z}{x_n})$ und $x_0 = a > 0$. Dann gilt
   $$\frac{1}{2}(x_n + \frac{z}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \frac{z}{x_n}} = \sqrt{z},$$
   denn (quadrieren und voneinander abziehen) es gilt
   $$\frac{1}{4}(x_n + \frac{z}{x_n})^2 - x_n \frac{z}{x_n} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{z}{x_n})^2 \geq 0.$$
   Somit ist die Folge für $n \geq 2$ nach unten beschränkt. Als nächstes zeigen wir, dass die Folge monoton fallend ist. Es gilt $x_n \geq \sqrt{z} \Rightarrow \frac{z}{x_n} \leq x_n$. Damit stellen wir fest
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{z}{x_n}) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n.$$
   Also hat die Folge einen Grenzwert und wir werden zur Berechnung genauso wie in der letzten Aufgabe vorgehen. Sei dazu wieder $y := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$. Wir müssen also die Gleichung $y = \frac{1}{2}(y + \frac{z}{y})$ lösen. Diese Gleichung ist äquivalent zu $0 = y^2 - z$, womit $y = \sqrt{z}$ die einzige nichtnegative Lösung ist.

3. Wir werden also die Proposition Schritt für Schritt durchgehen.

   (a) Es gilt für festes $n \in \mathbb{N}$
   $$f'(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}(1 - x)^{n-1}(1 - 2x).$$
   Man sieht also schnell ein, dass für $k < n$ und für $k > n$ gilt: $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$. Außerdem fällt ebenfalls auf, dass sich für $k = n$ der Vorfaktor $\frac{1}{n!}$ rauskürzt, also kann man auf jeden Fall sagen, dass $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) Es gilt $q^n \pi^{2n-2k} = q^n \frac{p^{n-k}}{q^{n-k}} = q^k p^{n-k} \in \mathbb{N}$. Somit gilt mit dem vorherigen Teil $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$.

(c) Durch die Produktregel kürzt sich der F'-Term gerade raus, womit die erste Gleichheit gilt. Mit Einsetzen erhält man die zweite Gleichheit. Die dritte Gleichheit sieht man ein, wenn man erkennt, dass es sich hierbei um eine Teleskopsumme handelt und für $k = n$ ist sowieso $f^{2k+2} = 0$. Übrig bleibt also nur der Term für $k = 0$ womit die letzte Gleichheit folgt.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \pi p^n \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx &= \pi p^n \frac{1}{\pi^2 p^n} \Big[F'(x) \sin(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x) \Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{\pi^2} (\pi F(1) + \pi F(0)) \\ &= F(1) + F(0). \end{aligned}$$

(e) Es gilt $\frac{p^n}{n!} = \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{p}{n}$. Die Folge ist also ab $n > p$ monoton fallend und der Grenzwert ist 0.