Markovketten

Andrej Depperschmidt

Vorlesungsskript

Universität Freiburg

Sommersemester 2016

Version: 20. Juni 2016

1 Einleitung

Markovprozesse ist eine für viele Anwendungen wichtige Klasse von stochastischen Prozessen. Ein *Markovprozess* ist ein durch Zeit indizierter stochastischer Prozess, der die sogenannte *Markoveigenschaft* erfüllt: gegeben die Information über die Entwicklung des Prozesses bis zur Zeit t hängt die zukünftige Entwicklung nur vom Zustand zur Zeit t ab und nicht von der Vergangenheit.

Als *Markovketten* bezeichnet man üblicherweise Markovprozesse, die stückweise konstante Pfade haben. Dabei können sowohl die Zeit als auch der Zustandsraum jeweils *diskret* oder *stetig* sein. Dabei sagen wir, dass eine Menge *diskret* ist, wenn sie abzählbar, also endlich oder abzählbar unendlich ist.

Beispiel 1.1. 1. Es sei $(\xi_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (u.i.v.) Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Für ein $x \in \mathbb{Z}$ definieren wir $X := (X_n)_{n\geq 0}$ durch

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n \geq 0. \tag{1.1}$$

Dann ist X die *gewöhnliche Irrfahrt (engl. simple random walk)* auf $\mathbb{Z}$ mit Start in x. Der *Irrfahrer* wechselt seine Position zu jedem diskreten Zeitpunkt. Da ξ_{n+1} unabhängig von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und somit auch von $X_0, \ldots, X_n$, ist es klar, dass, gegeben X_n die Zufallsvariable $X_{n+1} = \xi_{n+1} + X_n$ nicht von $X_0, \ldots, X_{n-1}$ abhängt. Damit ist X eine Markovkette.

2. Wenn im oberen Beispiel der Irrfahrer anstatt zu diskreten, jeweils nach einer exponentialverteilten Zeit seine Position ändert, dann erhalten wir die *gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ in stetiger Zeit.* Formal kann man $Y := (Y(t))_{t\geq 0}$ als

$$Y_t = x + \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i = X_{N_t} \tag{1.2}$$

definieren, wobei N_t die Anzahl der Sprünge (Übergänge) bis zur Zeit t bezeichnet. Wir werden später sehen, dass $N = (N_t)_{t\geq}$, genannt *Poissonprozess*, selbst eine wichtige Markovkette in stetiger Zeit ist. In diesem Beispiel ist die Exponentialverteilung der Wartezeiten wegen ihrer Gedächtnislosigkeit entscheidend. Da die Exponentialverteilung die einzige stetige gedächtnislose Verteilung ist, funktioniert dieser „Trick“ zwar mit jeder diskreten Markovkette X, aber nur mit Exponentialverteilten Wartezeiten zwischen den Sprüngen.

3. Ersetzen wir in (1.1) und (1.2) die Folge ξ durch eine Folge von beispielsweise u.i.v. normalverteilten ZV, dann erhalten wir eine Irrfahrt auf $\mathbb{R}$ in diskreter bzw. stetiger Zeit.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns hauptsächlich mit Markovketten in diskreter und stetiger Zeit und diskretem Zustandsraum. Dabei werden wir stets voraussetzen, dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gibt auf dem wir jeweils die Markovkette definieren können. Hier diskutieren wir kurz die Existenz solcher Wahrscheinlichkeitsräume und erinnern kurz an einige Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie die wir im Folgenden benutzen werden. An dieser Stelle verzichten wir auf Beweise und verweisen auf z.B. Klenke (2008) oder das Wahrscheinlichkeitstheorie-Skript von P. Pfaffelhuber, das auf seiner Homepage verfügbar ist.

Es sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum (z.B. eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ mit zugehöriger Borel-σ-Algebra) und T eine beliebige nichtleere Indexmenge (z.B. eine Teilmenge von $\mathbb{R}$).

Definition 1.2 (Zufallsvaraiblen und deren Verteilungen)**.** Eine Abbildung $Y : \Omega \to E$ bezeichnet man als eine E-wertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wenn Y messbar[1] ist, d.h. für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $Y^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$.

Die *Verteilung* P_Y der Zufallsvariablen Y ist definiert als das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter Y, d.h. für $A \in \mathcal{E}$ ist

$$P_Y(A) := \mathbb{P}(Y^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A\}).$$

Insbesondere wird hier deutlich, dass man für die Definition von P_Y die Messbarkeit von Y braucht.

Definition 1.3 (Stochastische Prozesse)**.** Ein *stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\in T}$ mit *Zustandsraum* $(E, \mathcal{E})$ ist eine Familie E-wertiger Zufallsvariablen X_t, $t \in T$ definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Für jedes $\omega \in \Omega$ bezeichnen wir die Abbildung $X(\omega) : T \to E$, $t \mapsto (X(\omega))(t) := X_t(\omega)$ als *Pfad, Trajektorie* oder *Realisierung* des stochastischen Prozesses.

Man interpretiert die Indexmenge T gern als Zeit und wir werden in dieser Vorlesung immer mit $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = [0, \infty)$ zu tun haben. Es geht aber auch komplizierter als das, z.B. $T = \mathbb{Z}^d$, und dann spricht man mitunter auch von *stochastischen Feldern*.

Wie schon oben bemerkt, sind die Pfade eines E-wertigen stochastischen Prozesses Funktionen von T nach E, sind also Elemente von E^T. Insbesondere kann man $X : \Omega \to E^T$ als eine E^T-wertige Zufallsvariable auffassen, wenn man auf diesem Raum eine σ-Algebra einführt. Meistens nimmt man die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}^T$. Diese σ-Algebra wird von den endlich dimensionalen Rechtecken der Form

$$\{f \in E^T : f(t_1) \in E_1, \dots, f(t_k) \in E_k\}, \quad k \in \mathbb{N},\ t_1, \dots, t_k \in T,\ E_1, \dots, E_k \in \mathcal{E},$$

erzeugt, mit anderen Worten ist $\mathcal{E}^T$ die kleinste σ-Algebra, die alle solche Rechtecke enthält. Man kann zeigen, dass X messbar bezüglich $\mathcal{E}^T$ ist und wir können tatsächlich von einer E^T-wertigen Zufallsvariablen sprechen. Nun lässt sich formal (genauso wie oben) auch die Verteilung eines stochastischen Prozesses definieren: Für $A \in \mathcal{E}^T$ setzen wir

$$P_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)).$$

[1] Der Begriff der *Messbarkeit* sollte an die Definition der Stetigkeit einer Abbildung zwischen topologischen Räumen erinnern.

Für allgemeine E und T sind diese Verteilungen deutlich komplizierter als es bei den rellwertigen Zuvallsvariablen der Fall ist, und man versucht sie mit anderen Mitteln (eindeutig) zu beschreiben. Ein solches Mittel sind die *endlich-dimensionalen Verteilungen* des Prozesses. Im Folgenden schreiben wir $J \sqsubset T$, wenn J eine endliche nichtleere Teilmenge von T ist.

Definition 1.4 (Endlich-dimensionale Verteilungen)**.** Es sei $X = (X_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess. Für $J \sqsubset T$ definieren wir $\widehat{P}_J$ als die gemeinsame Verteilung des Vektors $(X_j)_{j\in J}$. Die Familie $(\widehat{P}_J)_{J\sqsubset T}$ heißt *Familie endlich-dimensionaler Verteilungen* von X.

Man kann sich überlegen, dass die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eindeutig durch die Verteilung selbst festgelegt ist (die sind ja einfach Bildmaße der Verteilung unter Projektionsabbilungen von T nach J). Außerdem ist klar, dass so erhaltene Familien endlich-dimensionaler Verteilungen gewisse Konsistenzeigenschaften erfüllen sollten (die werden unten genauer formuliert). Der Existenzsatz von Kolmogorov zeigt umgekehrt, dass jede Familie endlich-dimensionaler Verteilungen, die diese Konsistenzeigenschaften erfüllt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^T, \mathcal{E}^T)$ eindeutig festlegt, wenn E ein *polnischer Raum*, d.h. ein vollständiger und separabler metrischer Raum, ist.

Definition 1.5 (Konsistenz)**.** Es seien T und $(E, \mathcal{E})$ wie oben und sei für jedes $J \sqsubset T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\overline{P}_J$ auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ gegeben. Die Familie $(\overline{P}_J)_{J\sqsubset T}$ heißt konsistent, wenn für alle $J_1 \sqsubset T$ und $J_2 \sqsubset T$ mit $J_1 \subset J_2$ jeweils gilt, dass $\overline{P}_{J_1}$ mit der Einschränkung von $\overline{P}_{J_2}$ auf J_1 übereinstimmt.

Satz 1.6 (Existenzsatz von Kolmogorov)**.** *Es sei E ein polnischer Raum, T eine nichtleere Indexmenge und $(\overline{P}_J)_{J\sqsubset T}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\overline{P}$ auf $(E^T, \mathcal{E}^T)$, so dass $(\overline{P}_J)_{J\sqsubset T}$ die zu $\overline{P}$ gehörige Familie endlich-dimensionaler Verteilungen ist. Ferner existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und darauf ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in T}$ mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ und Verteilung $\overline{P}$.*

Um einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu definieren bzw. dessen Existenz zu beweisen reicht es nach diesem Satz für jedes $n \in\in \mathbb{N}_0$ die Verteilung des Vektors $(X_0, \ldots, X_n)$ anzugeben und zu zeigen, dass diese Verteilungen konsistent sind. Unter anderem folgt mit dem Satz auch die Existenz von Folgen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, was man natürlich auch mit dem Produktmaßsatz erhält. Wir werden später die Existenz von Markovketten mit dem Satz von Kolmogorov beweisen.

Es gibt eine große Auswahl an guten Büchern, die Markovketten auf teilweise verschiedene Art und Weise behandeln und unterschiedlich hohe Schwierigkeits- und Spezialisierungsgrade haben. Aus der umfangreicher Literatur zu Markovketten ist im Literaturverzeichnis eine Auswahl aufgelistet, die direkt bei der Vorbereitung der Vorlesung benutzt wurde.

2 Markovketten in diskreter Zeit

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Markovketten in diskreter Zeit auf einem abzählbaren (endlich oder abzählbar unendlich) *Zustandsraum* I. Die Elemente von I bezeichnen wir als *Zustände*. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$ ist eine Familie von I-wertigen Zufallsvariablen definiert auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, den wir im folgenden als gegeben annehmen.

2.1 Definition und erste Beispiele

Eine Markovkette auf einem diskreten Zustandsraum I ist ein stochastischer Prozess der z.B. die Bewegung eines Teilchen auf I modelliert. Das Teilchen entscheidet (würfelt aus) zu diskreten Zeitpunkten immer wieder neu, wohin es sich von der gegenwärtigen Position aus, als nächstes begibt. Die Markoveigenschaft besagt dann, dass diese Entscheidungen jeweils nur von der aktuellen Position des Teilchens abhängen, nicht aber von der Art und Weise wie es dahin gekommen ist.

Beispiel 2.1 (Irrfahrt auf einer Gruppe)**.** Es seien I eine kommutative abzählbare Gruppe (z.B. $\mathbb{Z}^d$) und $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter (u.i.v.) I-wertiger Zufallsvariablen (ZV). Für $x \in I$ definieren wir $(X_n)_{n\geq 0}$ durch

$$X_n = x + \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Wegen $X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$ und wegen Unabhängigkeit von ξ_{n+1} von $\xi_1, \dots, \xi_n$ und somit auch von $X_0, \dots, X_m$ ist es klar, dass X_{n+1} von $X_0, \dots, X_n$ nur durch X_n abhängt. Damit ist $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit $X_0 = x$. Man bezeichnet diese Markovkette als *Irrfahrt (engl. random walk) auf der Gruppe I*. Abbildung 2.1 zeigt ein Übergangsdiagramm einer Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, wobei $\xi_1, \xi_2, \dots$ die Verteilung $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$ und $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1 - p$ für ein $p \in [0, 1]$ haben.

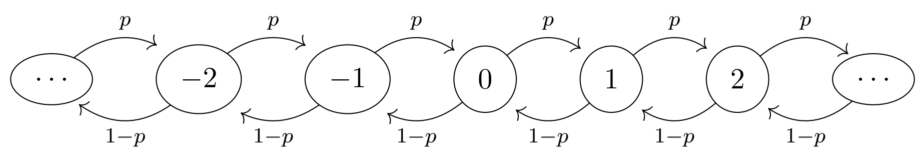

Abbildung 2.1: Diagramm einer Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

Um die Verteilung einer Markovkette zu beschreiben, reicht es, wie wir werden später sehen werden, wegen der Markoveigenschaft die „Regeln" zu kennen, nach denen sich das Teilchen einen neuen Zustand aussucht und wo es startet. Diese sind durch die *Übergangsmatrix* und die *Anfangsverteilung* gegeben.

Definition 2.2 (Stochastische Matrix)**.** Eine Matrix $P = (p_{ij})_{ij \in I}$ heißt *stochastische Matrix*, falls die Zeilen von P Wahrscheinlichkeitsmaße (=Verteilungen) auf I sind, d.h. wenn

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j \in I \quad \text{und} \quad \sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \quad \text{für alle } i \in I. \tag{2.1}$$

Definition 2.3 (Homogene Markovkette in diskreter Zeit)**.** Es seien $\nu = (\nu(i))_{i \in I}$ eine Verteilung auf I und $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ eine stochastische Matrix auf I. Ein I-wertiger stochastischer Prozess $(X_n)_{n \geq 0}$ ist eine *zeitlich homogene Markovkette in diskreter Zeit* mit *Anfangsverteilung* ν und *Übergangsmatrix* P, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in I$ gilt

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \nu(i_0), \tag{2.2}$$

und

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}, \tag{2.3}$$

sofern die Ereignisse, auf die bedingt wird positive Wahrscheinlichkeit haben. Wir nennen $(X_n)_{n \geq 0}$ kurz eine (ν, P)-*Markovkette*, oder noch kürzer (ν, P)-*MK*. Die Eigenschaft (2.3) wird *Markoveigenschaft* genannt.

Mit dieser Definition sieht man unter Anderem, dass die i-te Zeile der Übergangsmatrix die Verteilung von X_{n+1} bedingt auf $X_n = i$ angibt.

Wie schon im Beispiel 2.1 gesehen lassen sich Markovketten sehr gut durch Übergangsdiagramme veranschaulichen. Diese lassen sich leicht aus den Übergangsmatrizen ablesen. Umgekehrt ist es auch einfach eine Übergangsmatrix zu bestimmen, die zu einem gegebenen Übergangsdiagramm gehört.

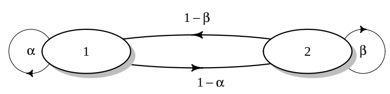

Abbildung 2.2: Allgemeine Markovkette mit zwei Zuständen

Beispiel 2.4 (Allgemeine Markovkette mit zwei Zuständen)**.** Abbildung 2.2 zeigt ein Diagramm einer allgemeinen Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2\}$, wobei $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Falls zur Zeit n das Teilchen sich in 1 befindet, so bleibt es dort auch zur Zeit $n + 1$ mit W'keit α oder wechselt in den Zustand 2 mit W'keit $1 - \alpha$. Ist das Teilchen zur Zeit n in

2, dann bleibt es dort mit W'keit β oder wechselt in den Zustand 1 mit W'keit $1-\beta$. Die Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

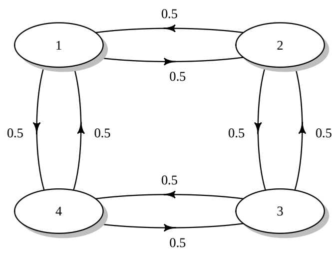

Abbildung 2.3: Irrfahrt auf einem Graphen

Beispiel 2.5 (Irrfahrt auf einem Graphen)**.** Es sei $I = \{1, 2, 3, 4\}$. Für die Markovkette mit dem Übergangsdiagramm aus Abbildung 2.3 ist die Übergangsmatrix gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

An dem Diagramm kann man sofort erkennen, dass die Markovkette periodisch (eine genaue Definition von Periodizität folgt später) ist: Ist der Irrfahrer zur Zeit 0 in $\{1, 3\}$, dann ist er fast sicher (mit W'keit 1) zu ungeraden Zeitpunkten in einem der Zustände aus $\{2, 4\}$ und zu geraden Zeitpunkten in einem der Zustände aus $\{1, 3\}$.

Das nächste Resultat liefert eine äquivalente Charakterisierung einer Markovkette. Man sieht dieser Charakterisierung eventuell nicht sofort die Markoveigenschaft (2.3) an, dafür lässt sich in diesem Fall der Existenzsatz von Kolmogorov (Satz 1.6) direkt anwenden.

Satz 2.6. *Ein I-wertiger stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann eine (ν, P)-Markovkette, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_0, i_1, \ldots, i_n \in I$*

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \nu(i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{2.4}$$

Beweis. Es sei X eine (ν, P)-MK. Für $i_0, \ldots, i_n \in I$ mit

$$\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0$$

gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichheit die Markoveigenschaft (2.3) benutzt haben. Induktiv erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) &= \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \cdots \mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_0 = i_0) \\ &= p_{i_{n-1} i_n} \cdots p_{i_1 i_2} p_{i_0 i_1} \nu(i_0),\end{aligned}$$

was gerade (2.4) ist.

Ist umgekehrt (2.4) erfüllt, dann folgt mit $n = 0$ sofort

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \nu(i_0) \quad \text{für alle } i_0 \in I.$$

Ferner, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0)} \\ &= \frac{\nu(i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_{n+1}}}{\nu(i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}} \\ &= p_{i_n i_{n+1}}\end{aligned}$$

sofern $\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) > 0$ ist. Somit ist X eine (ν, P)-MK. □

Satz 2.7 (Existenz von Markovketten)**.** *Es sei eine Verteilung $\nu = (\nu(i))_{i \in I}$ und eine Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{ij \in I}$ auf I gegeben. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsarum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und darauf eine I-wertige (ν, P)-Markovkette $X = (X_n)_{n \geq 0}$.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\overline{P}_n$ auf I^{n+1} durch

$$\overline{P}_n(i_0, \ldots, i_n) = \nu(i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}, \quad i_0, \ldots, i_n \in I.$$

Die Aussage des Satzes folgt sofort mit dem Satz 1.6, sobald man die Konsistenz der Familie $(\overline{P}_n)_{n \geq 0}$ gezeigt hat (*Übung!*). □

Für ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$ schreiben wir

$$\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = i), \quad i \in I, \tag{2.5}$$

$$\mathbb{P}_\nu(A) = \sum_{i \in I} \nu(i) \mathbb{P}_i(A), \tag{2.6}$$

d.h. $\mathbb{P}_\nu(A)$ ist die W'keit von A, wenn ν die Anfangsverteilung ist. Wir bezeichnen mit δ_i das Diracmaß in i, definiert durch

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & : j = i, \\ 0 & : j \neq i. \end{cases} \tag{2.7}$$

Dann ist $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{\delta_i}$.

Satz 2.8 (Variante der Markoveigenschaft)**.** *Es sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine (ν, P)-MK. Bedingt auf $X_m = i$ ist $(X_{m+n})_{n \geq 0}$ eine (δ_i, P)-MK unabhängig von $X_0, \ldots, X_m$.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für jedes Ereignis $A \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$, alle $n \geq 0$ und alle $i_m, \dots, i_{m+n}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \dots, X_{m+n} = i_{m+n}\} \cap A | X_m = i) \\ = \delta_i(i_m) p_{i_m i_{m+1}} \dots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \mathbb{P}(A | X_m = i)\end{aligned} \tag{2.8}$$

gilt. Da jedes Ereignis aus $\sigma(X_0, \dots, X_m)$ sich als disjunkte Vereinigung elementarer Ereignisse der Form

$$A = \{X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m\}, \quad i_0, \dots, i_m \in I, \tag{2.9}$$

schreiben lässt, genügt es (2.8) für solche Ereignisse zu prüfen, weil wir dann für den allgemeinen Fall die σ-Additivität von $\mathbb{P}$ ausnutzen können. Für A wie in (2.9) ist

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \dots, X_{m+n} = i_{m+n}\} \cap A | X_m = i) \\ &\quad = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m, \dots, X_{m+n} = i_{m+n} \text{ und } i_m = i)}{\mathbb{P}(X_m = i)}\end{aligned}$$

und mit Satz 2.6 in den nächsten zwei Zeilen

$$\begin{aligned}&\quad = \frac{\nu(i_0) p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-1} i_m} p_{i_m i_{m+1}} \dots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \delta_i(i_m)}{\mathbb{P}(X_m = i)} \\ &\quad = \delta_i(i_m) p_{i_m i_{m+1}} \dots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m, X_m = i)}{\mathbb{P}(X_m = i)},\end{aligned}$$

was (2.8) zeigt. □

Bemerkung 2.9. Es seien $A \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$ und $B \in \sigma(X_m, \dots, X_{m+n})$, d.h. von der Zeit m aus betrachtet liegt A in der Vergangenheit und B in der Zukunft. Dann folgt mit Satz 2.8

$$\mathbb{P}(A \cap B | X_m = i) = \mathbb{P}(A | X_m = i) \mathbb{P}(B | X_m = i),$$

was in Worten bedeutet, dass die Vergangenheit und die Zukunft bedingt auf die Gegenwart unabhängig sind. Insbesondere "vergisst" eine MK ihre Anfangsverteilung bedingt auf den Zustand zur Zeit m.

Als nächstes schauen wir uns an, wie man die Verteilung einer MK zur Zeit n mit Hilfe der Anfangsverteilung und der Übergangsmatrix bestimmt. Wir schreiben Verteilungen auf I in Form eines Zeilenvektors. Die üblichen, aus der linearen Algebra bekannten, Rechenregeln lassen sich problemlos auf unendliche Matrizen und Vektoren übertragen. Ist μ eine Verteilung auf I und P eine stochastische Matrix, so ist durch

$$(\mu P)_j = \sum_{i \in I} \mu(i) p_{ij}$$

eine Verteilung definiert, denn natürlich ist $(\mu P)_j \geq 0$ und es gilt

$$\sum_{j \in I} (\mu P)_j = \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \mu(i) p_{ij} = \sum_{i \in I} \mu(i) \sum_{j \in I} p_{ij} = \sum_{i \in I} \mu(i) = 1.$$

Da Zeilen einer stochastischen Matrix Verteilungen auf I sind folgt auch, dass P^2, definiert durch

$$(P^2)_{ij} = \sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj},$$

eine stochastische Matrix ist. Damit sind allgemein Potenzen stochastischer Matrizen stochastische Matrizen und es gilt natürlich

$$P^{m+n} = P^m P^n. \tag{2.10}$$

Schreiben wir für $n \geq 0$

$$p_{ij}^{(n)} := (P^n)_{ij}, \tag{2.11}$$

wobei P^0 die Einheitsmatrix ist, dann ist (2.10) ausgeschrieben

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \tag{2.12}$$

und es folgt sofort eine einfache Ungleichung, die wir später brauchen werden: Für alle $i, j, k \in I$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$p_{ij}^{(n+m)} \geq p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{2.13}$$

Die Gleichungen (2.10) und (2.12) werden *Chapman-Kolmogorov-Gleichungen* genannt.

Satz 2.10 (n-Schritte Übergangswahrscheinlichkeiten)**.** *Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ eine (ν, P)-MK, dann gilt $\mathbb{P}_\nu(X_n = j) = (\nu P^n)_j$. Insbesondere ist $\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}$.*

Dieser Satz besagt, dass P^n die n-Schritte Übergangsmatrix ist und dass, um die Verteilung der (ν, P)-MK zu bestimmen, wir einfach P^n von links mit dem Vektor der Anfangsverteilung zu multiplizieren brauchen.

Beweis. Es ist nur die erste Aussage zu zeigen, da die zweite ein Spezialfall davon ist. Mit Satz 2.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\nu(X_n = j) &= \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in I} \mathbb{P}_\nu(X_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in I} \nu(i_0) p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} j} \\
&= (\nu P^n)_j.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.11 (Polya Urne – Beispiel einer zeitlich inhomogenen Markovkette)**.** Wir betrachten eine Urne, die zur Zeit 0, r_0 rote und g_0 grüne Kugeln enthält. Zur Zeit n ziehen wir zufällig eine Kugel aus der Urne, legen sie wieder zurück und legen eine Kugel derselben Farbe dazu. Nach Konstruktion ist klar, dass zur Zeit n insgesamt $n + r_0 + g_0$

Kugeln in der Urne enthalten sind. Es sei R_n die Anzahl der roten Kugeln in der Urne zur Zeit n. Dann ist $R := (R_n)_{n\geq 0}$ eine MK mit Zustandsraum $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = j | R_n = i) = \begin{cases} \frac{i}{n+r_0+g_0} & \text{falls } j = i+1, \\ 1 - \frac{i}{n+r_0+g_0} & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten von n ist R offensichtlich keine zeitlich homogene MK. Nun definieren wir eine Markovkette $Y := (Y_n)_{n\geq 0}$ durch $Y_n = (n, R_n)$. Der Zustandsraum ist $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_+$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_0 = (0, r_0)) &= 1 \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} = (k, j) | Y_n = (m, i)) &:= \begin{cases} \frac{i}{m+r_0+g_0} & \text{falls } j = i+1 \text{ und } k = m+1, \\ 1 - \frac{i}{m+r_0+g_0} & \text{falls } j = i \text{ und } k = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hier hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von n ab. Also ist Y eine zeitlich homogene MK. Dadurch, dass wir die zeitliche Komponente als Teil des Zustandes aufgefasst haben, konnten wir also aus einer inhomogenen MK eine homogene machen.

Alternativ können wir die Markovkette $(R_n, G_n)_{n\geq 0}$ betrachten, wobei G_n die Anzahl der grünen Kugeln zur Zeit n in der Urne angibt. Der Zustandsraum dieser Markovkette ist $\mathbb{N}^2$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((R_0, G_0) = (r_0, g_0)) &= 1 \\ \mathbb{P}((R_{n+1}, G_{n+1}) = (r', g') | (R_n, G_n) = (r, g)) &:= \begin{cases} \frac{r}{r+g} & \text{falls } (r', g') = (r+1, g), \\ \frac{g}{r+g} & \text{falls } (r', g') = (r, g+1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Auch diese erweiterte Markovkette hat zeitlich homogene Übergangswahrscheinlichkeiten. □

Wie im ersten Teil des Beispiels kann eine zeitlich inhomogene Markovkette immer zu einer zeitlich homogenen erweitert werden indem der Zustandsraum erweitert wird. Ähnlich kann man sogar stochastische Prozessen die nicht Markovsch sind auch zu Markovschen Prozessen erweitern indem man den Zustand zur Zeit t mit der ganzen Entwicklung des Prozesses (also mit dem Pfad) bis zur Zeit t erweitert. Das macht natürlich die Analyse solcher Prozesse nicht unbedingt einfacher.

2.2 Kommunizierende Klassen und Perioden

In diesem Abschnitt diskutieren wir die *Irreduzibilität* und die *Aperiodizität* einer Markovkette bzw. der zugehörigen Übergangsmatrix. Insbesondere für Markovketten mit endlichen Zustandsräumen spielen diese Begriffe eine wichtige Rolle, weil in diesem Fall

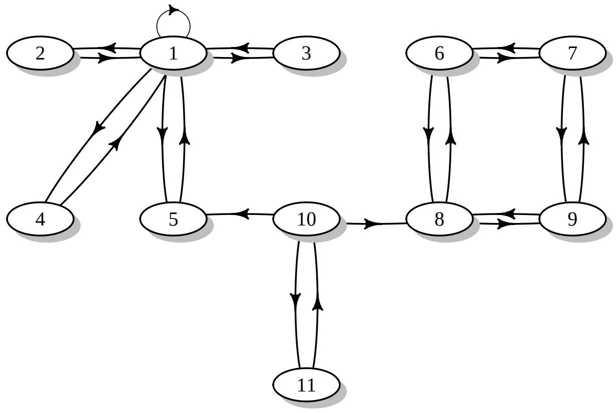

Abbildung 2.4: Einteilung einer MK in Klassen.

diese beiden Eigenschaften zusammen *Existenz und Eindeutigkeit* von Gleichgewichtsverteilungen von Markovketten liefern.

Bevor wir mit genauen Definitionen beginnen schauen wir uns ein Beispiel an.

Beispiel 2.12. Abbildung 2.4 zeigt ein Diagramm einer Markovkette mit $I = \{1, \ldots, 11\}$. Ein Pfeil von i nach j bedeutet $p_{ij} > 0$ (genaue Zahlen sind uns hier nicht wichtig), sagt aber über p_{ji} nichts aus. Folgendes können wir an dem Diagramm sofort ablesen:

(i) Startet die MK in $\{1, \ldots, 5\}$, dann verlässt sie diese Menge nicht.

(ii) Startet die MK in $\{6, \ldots, 9\}$, dann verlässt sie diese Menge ebenfalls nicht und jeder der Zustände kann nur nach einer gerader Anzahl von Schritten wieder besucht werden.

(iii) Startet die MK in $\{10, 11\}$, so kann sie dort zwar einige Zeit verbringen, wird diese Menge aber fast sicher nach endlicher Zeit verlassen und nie wieder besuchen, weil sie dann in einer der Mengen aus (i) und (ii) landet. Für asymptotisches Verhalten spielt die Menge $\{10, 11\}$ also keine Rolle.

Definition 2.13 (Kommunizierende Zustände, wesentliche Zustände)**.** Wir sagen, dass der Zustand j vom Zustand i aus *erreichbar* ist, in Zeichen $i \to j$, falls

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{für ein } n \geq 0 \ . \tag{2.14}$$

Wir sagen, dass i und j *(miteinander) kommunizieren*, in Zeichen $i \leftrightarrow j$, falls $i \to j$ und $j \to i$. Ein Zustand i heißt *unwesentlich* falls es ein j mit $i \to j$ und $j \not\to i$ gibt. Andernfalls heißen die Zustände *wesentlich*.

Natürlich sind für die asymptotische Entwicklung einer Markovkette nur die wesentlichen Zustände von Bedeutung.

Lemma 2.14. *Die Beziehung „$\leftrightarrow$“ definiert eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität ($i \leftrightarrow i$) und Symmetrie ($i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$) folgen sofort aus der Definition von $\leftrightarrow$. Transitivität ($i \leftrightarrow k, k \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$) folgt aus (2.13). □

Definition 2.15 (Abgeschlossenheit, Irreduzibilität)**.** Eine Teilmenge $C \subset I$ heißt *abgeschlossen*, falls aus $i \in C$ und $i \to j$ stets $j \in C$ folgt. Ein Zustand i heißt *absorbierend*, falls $\{i\}$ eine abgeschlossene Klasse ist. Eine Markovkette (und die zugehörige Übergangsmatrix) heißt *irreduzibel*, wenn I aus einer einzigen kommunizierenden Klasse besteht, d.h. wenn alle Zustände miteinander kommunizieren.

Mit obigen Definitionen und dem Lemma ist klar, dass sich der Zustandsraum einer Markovkette als eine disjunkte Vereinigung

$$I = U \cup C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$$

schreiben lässt wobei U die Menge der unwesentlichen Zustände ist und $C_0, C_1, \ldots$ abgeschlossene kommunizierende Klassen sind.

Beispiel 2.16. In Abbildung 2.4 sind

$$U = \{10, 11\},\ C_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \ \text{ und } C_1 = \{6, 7, 8, 9\}$$

jeweils kommunizierende Klassen. Die Klassen C_0 und C_1 sind abgeschlossen, U aber nicht, denn es ist z.B. $10 \to 5$, aber $5 \not\to 10$. C_0 und C_1 sind wesentlich, U ist unwesentlich.

Betrachten wir die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ aus Beispiel 2.1. Wir zerlegen den Zustandsraum $I = \mathbb{Z}$ in Mengen der geraden und ungeraden Zahlen C_0 bzw. C_1. Es ist klar, dass, gegeben $X_n \in C_0$ ($\in C_1$) wir $X_{n+1} \in C_1$ ($\in C_0$) fast sicher haben, weil die Irrfahrt mit W'keit 1 einen Schritt nach links oder rechts macht. Insbesondere heißt es, dass die Irrfahrt immer nur nach einer geraden Anzahl von Schritten in einen Zustand zurückkehren kann.

In der folgenden Definition bezeichnet $\mathrm{ggT}\{A\}$ den größten gemeinsamen Teiler einer Menge A von positiven natürlichen Zahlen.

Definition 2.17 (Periode, Aperiodizität)**.** Die *Periode* eines Zustandes $i \in I$ ist definiert als

$$d_i = \mathrm{ggT}\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

mit $d_i = +\infty$, falls $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \geq 1$ ist. Ist $d_i = 1$, so heißt der Zustand i *aperiodisch*.

Mit dieser Definition hat bei den Irrfahrten aus Beispielen 2.1 und 2.5 jeder Zustand die Periode 2.

Beispiel 2.18 (periodische und aperiodische Markovketten)**.** Abbildung 2.5 zeigt Übergangsdiagramme von zwei Markovketten mit demselben Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 5\}$.

Betrachten wir zunächst den Graphen (A). Es ist klar, dass in diesem Fall für alle $i \in I$ und alle $n \geq 1$, $p_{ii}^{(2n)} > 0$ und $p_{ii}^{(2n+1)} = 0$. Somit haben alle Zustände die Periode 2.

Nun betrachten wir den Graphen (B). Der entscheidende Unterschied ist, dass $p_{11} = 0$ im Fall (A) und $p_{11} > 0$ im Fall (B) ist. Es folgt sofort, dass der Zustand 1 in (B) aperiodisch ist. Aber auch alle anderen Zustände sind aperiodisch, denn es gilt beispielsweise $p_{22}^{(2)} = 0.125$, $p_{22}^{(3)} = 0.5 \cdot 0.125$ und $\mathrm{ggT}\{2, 3\} = 1$.

Man beachte, dass die MK in (A) und in (B) irreduzibel sind, und dass die Perioden für alle Zustände dieselben sind. Wie wir bald sehen werden, ist die Abbildung $i \mapsto d_i$ konstant innerhalb kommunizierender Klassen.

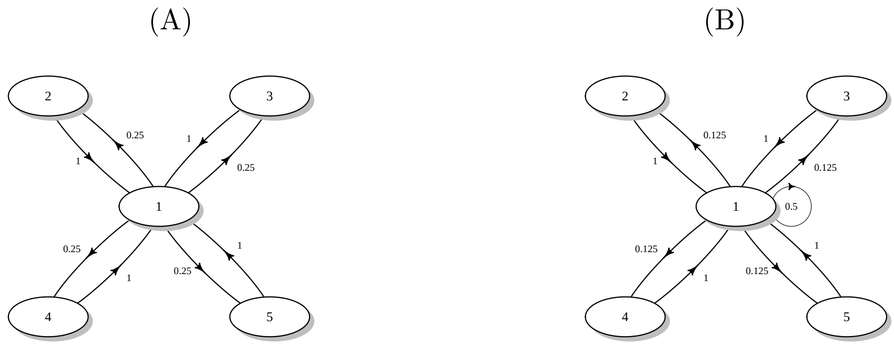

Abbildung 2.5: MK mit Periode 2 und eine aperiodische Variante davon

Bemerkung 2.19. Wie im obigen Beispiel ist es oft leicht an einem Diagramm abzulesen, ob ein Zustand i aperiodisch ist. Es reicht dazu zwei Pfade von i nach i zu finden, die jeweils positive W'keit haben und deren Längen teilerfremd sind.

Das nächste Resultat ist aus der Zahlentheorie bekannt. Für einen Beweis verweisen wir auf z.B. (Theorem 1.1 Brémaud 1999, p. 418).

Lemma 2.20. *Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine bezüglich Addition abgeschlossene Menge mit $ggT\{M\} = 1$, dann gibt es ein n_0 mit $n \in M$ für alle $n \geq n_0$.*

Als Anwendung davon lässt sich leicht der folgende Satz beweisen.

Satz 2.21. *Es sei $j \in I$ ein Zustand mit Periode d. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Ist $d = 1$, so gibt es ein $n_0 = n_0(j)$ mit $p_{jj}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq n_0$.

(ii) Ist $d > 1$, so gibt es ein $n_0 = n_0(j, d)$ mit $p_{jj}^{(nd)} > 0$ für alle $n \geq n_0$.

(iii) Ist $d \geq 1$ und $p_{ij}^{(m)} > 0$ für ein $i \in I$ und ein $m \geq 1$, so gibt es ein $n_0 = n_0(j, d, m)$ mit $p_{ij}^{(nd+m)} > 0$ für alle $n \geq n_0$.

Nun können wir das früher angekündigte Resultat beweisen, das besagt, dass Perioden auf auf kommunizierenden Klassen konstant sind.

Satz 2.22 (Periode ist konstant auf Klassen)**.** *Ist C eine kommunizierende Klasse, dann gilt $d_i = d_j$ für alle $i, j \in C$.*

Beweis. Für $i \neq j$ aus C gibt es nach Voraussetzung $k, l \geq 1$, sodass $p_{ij}^{(k)}, p_{ji}^{(l)} > 0$ sind. Dann gilt mit (2.13)

$$p_{ii}^{(k+l)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)} > 0,$$

und nach Definition der Periode muss d_i ein Teiler von $k+l$ sein. Sei nun n so, dass $p_{jj}^{(n)} > 0$. Dann ist d_j ein Teiler von n. Wegen

$$p_{ii}^{(k+l+n)} \geq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)} > 0,$$

muss d_i ein Teiler von $n+k+l$ sein. Da es aber ein Teiler von $k+l$ ist, ist es auch einer von n.

Aus $d_j = \mathrm{ggT}\{n \geq 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\}$ folgt nun $d_i \leq d_j$. Nach Vertauschen der Rollen von i und j in dem obigen Argument folgt $d_i = d_j$. $\square$

Definition 2.23. Ist C eine kommunizierende Klasse, dann bezeichnen wir mit $d(C)$ die (gemeinsame) Periode der Elemente in dieser Klasse. Wir nennen die Klasse *aperiodisch* falls $d(C) = 1$.

Satz 2.24. *Ist C eine kommunizierende Klasse mit Periode $d = d(C) > 1$, dann gibt es d disjunkte* zyklische Unterklassen $K_0, \dots, K_{d-1}$ *mit $\cup_{\ell<d} K_\ell = C$, sodass für $i \in K_\ell$ gilt*

$$\sum_{j \in K_{\ell+1}} p_{ij} = 1,$$

wobei wir $K_d = K_0$ setzen. Startet also die Markovkette in K_0, dann ist sie zu den Zeitpunkten $n = \ell + kd$ mit $k = 0, 1, \dots,$ $\ell = 0, 1, \dots, d-1$ in K_ℓ, im nächsten Schritt fast sicher in $K_{\ell+1}$, dann in $K_{\ell+2}$ etc.

Beispiel 2.25 (Übergangsmatrizen auf periodischen Klassen)**.** Für die zu Abb.2.5(A) gehörige Übergangsmatrix gilt

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Allgemein lassen sich die Übergangsmatrix P und die (fünf Schritte) Übergangsmatrix P^5 im Fall $d = 5$ (nach eventueller Umsortierung der Zustände) in folgende Blockgestalten bringen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{45} \\ P_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P^5 = \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} \end{pmatrix}.$$

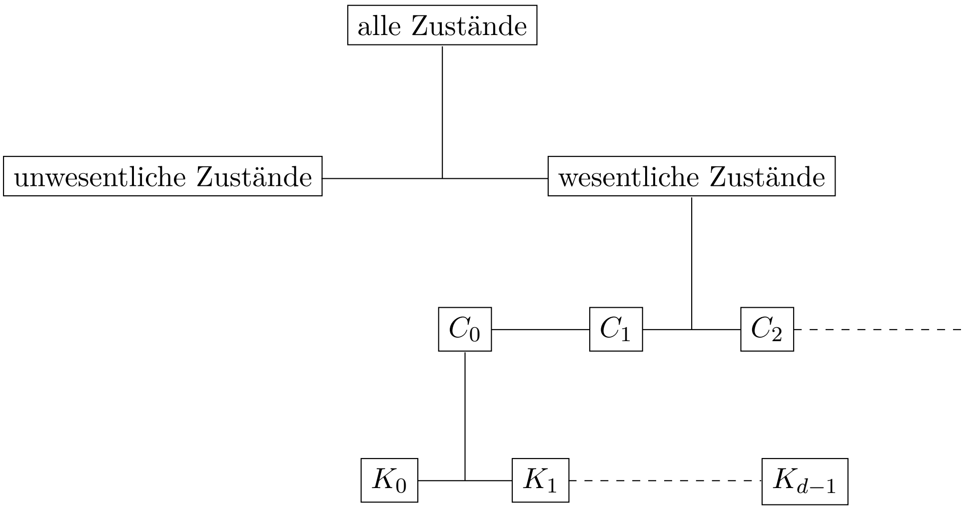

Abbildung 2.6: Klassifikation aller Zustände: Hier sind $C_0, C_1, \ldots$ kommunizierende Klassen und $K_0, \ldots, K_{d-1}$ sind zyklische Unterklassen von C_0 mit $d = d(C_0)$.

Beweis von Satz 2.24. Wir nehmen ein festes $i_0 \in C$ und definieren

$$\begin{aligned} K_0 &= \{j \in C : p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = kd, \text{ für ein } \ k = 0, 1, \ldots\} \\ K_1 &= \{j \in C : p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = kd + 1, \text{ für ein } \ k = 0, 1, \ldots\} \\ &\vdots \\ K_{d-1} &= \{j \in C : p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = kd + (d-1), \text{ für ein } \ k = 0, 1, \ldots\}. \end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser Mengen ist C, denn für jedes $j \in C$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $p_{i_0 j}^{(n)} > 0$ und für geeignete $k = 0, 1, \ldots$ und $\ell = 0, \ldots, d-1$ ist $n = kd + \ell$.

Außerdem sind die Klassen $K_0, \ldots, K_{d-1}$ disjunkt, weil $d(C) = d$ ist. Ist $i \in K_\ell$ für ein $\ell = 0, \ldots, d-1$, dann ist zu zeigen, dass aus $p_{ij} > 0$ stets $j \in K_{(\ell+1) \mod d}$ folgt.

Ist n mit $p_{i_0 i}^{(n)} > 0$ gegeben, so können wir $n = \ell + kd$ schreiben für geeignete $\ell = 0, \ldots, d-1$ und $k = 0, 1, \ldots$. Damit ist $i \in K_\ell$ und es gilt $n = \ell \mod d$. Sei nun $j \in C$ so, dass $p_{ij} > 0$. Dann gilt $p_{i_0 j}^{(n+1)} \geq p_{i_0 i}^{(n)} p_{ij} > 0$ und außerdem auch $n + 1 = (\ell + 1) \mod d$, was $j \in K_{(\ell+1) \mod d} = K_{\ell+1}$ zeigt. □

2.3 Stoppzeiten und die starke Markoveigenschaft

Die Variante der Markoveigenschaft, die wir in Satz 2.8 bewiesen haben, besagt, dass zu jedem (deterministischem) Zeitpunkt m, bedingt auf den Zustand $X_m = i$, die Markovkette nach dieser Zeit m sich wie eine in i gestartete Markovkette verhält. Der Prozess startet also zu deterministischen Zeitpunkten vom jeweiligen Zustand neu. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass dies auch für Stoppzeiten gilt.

Definition 2.26 (Filtration, Stoppzeiten)**.** Für jedes n sei $\mathcal{F}_n := \sigma(X_m, m \leq n)$ die von der endlichen Folge $X_0, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Algebra. Es gilt natürlich $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \ldots \mathcal{F}$. Man nennt die Folge $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ die zur Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ gehörige *Filtration.* Eine Abbildung $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ ist eine *Stoppzeit von* $(X_n)_{n\geq 0}$, wenn $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Anstatt $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ hätten wir in der obigen Definition auch $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ fordern können, denn es ist $\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$. Aus $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ und $\{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$ würde dann $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ folgen. Umgekehrt folgt aus $\{T = 0\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n, \ldots, \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ auch $\{T \leq n\} = \cup_{i=0}^n \{T = i\} \subset \mathcal{F}_n$.

Typischerweise bedeutet $\{T = n\}$ ($\{T \leq n\}$), dass ein bestimmtes Ereignis zur Zeit n (bzw. bis zur Zeit n) eingetreten ist. Die Forderung $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ ($\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$) besagt dann, dass man nur die Information bis zur Zeit n, also den Pfad $X_0, \ldots, X_n$ braucht um zu entscheiden ob das Ereignis zur Zeit n (bis zur Zeit n) eingetreten ist oder nicht.

Beispiel 2.27.

1. Deterministische Zeitpunkte, also $T \equiv N$, sind Stoppzeiten.

2. Für $A \subset I$ nennen wir
$$T_A := \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\} \tag{2.15}$$
die *erste Rückkehrzeit in A* und
$$S_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \tag{2.16}$$
die erste *Eintrittszeiten in A*. Dabei verwenden wir mit die übliche Konvention $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Man beachte, dass je nach Startverteilung der Markovkette T_A und S_A gleich sein können oder auch nicht. Es ist nämlich $S_A = 0$ fast sicher, wenn die Markovkette in der Menge A startet, nach Definition ist aber $T_A \geq 1$. Startet die Markovkette im Kompliment von A, dann stimmen beide Stoppzeiten überein. Dass sie beide Stoppzeiten sind folgt aus
$$\begin{aligned} \{T_A = n\} &= \{X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}, \\ \{S_A = n\} &= \{X_0 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}. \end{aligned}$$
Für $A = \{i\}$ schreiben wir T_i bzw. S_i.

3. Durch
$$T_A^{(0)} = 0 \qquad \text{und} \qquad T_A^{(k)} := \inf\{n > T_A^{(k-1)} : X_n \in A\}\ k \geq 1,$$
kann man rekursiv eine Folge von Stoppzeiten definieren. Man nennt $T_A^{(k)}$ die *k-te Rückkehrzeit in A.*

4. Die *letzte Austrittszeit* aus A, definiert durch
$$L^A := \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\},$$
ist im Allgemeinen keine Stoppzeit, weil das Ereignis $\{L^A = n\}$ davon abhängt ob die Markovkette die Menge A nach Zeit n noch besucht oder nicht.

5. Summen, Maxima und Minima von Stoppzeiten sind Stoppzeiten, im allgemeinen aber nicht die Differenz. Beispielsweise ist $T_i - 1$ keine Stoppzeit, weil
$$\{T_i - 1 = n\} = \{T_i = n+1\},$$
was in $\mathcal{F}_{n+1}$ enthalten ist, aber im Allgemeinen nicht in $\mathcal{F}_n$.

Satz 2.28 (Starke Markoveigenschaft)**.** *Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine (ν, P)-MK und sei T eine Stoppzeit von $(X_n)_{n\geq 0}$. Bedingt auf $T < \infty$ und $X_T = i$ ist dann $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ eine (δ_i, P)-MK unabhängig von $X_0, \dots, X_T$.*

Wir haben bereits gesehen, dass $T_i - 1$ keine Stoppzeit ist. Man kann aber auch leicht sehen, dass zu dieser zufälligen Zeit die Markoveigenschaft nicht gelten kann. Denn nach Zeit $T_i - 1$ springt die Markovkette deterministisch in den Zustand i, verhält sich also nicht wie eine neu gestartete Kopie der Markovkette.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für jedes durch $X_0, \dots, X_T$ bestimmtes Ereignis B und alle $i, i_0, \dots, i_n$ gilt
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_T = i_0, \dots, X_{T+n} = i_n\} \cap B | T < \infty, X_T = i)\\ &\qquad = \mathbb{P}_i(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)\mathbb{P}(B|T < \infty, X_T = i).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Es gilt
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_T = i_0, \dots, X_{T+n} = i_n\} \cap B | T < \infty, X_T = i)\\ &\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_T = i_0, \dots, X_{T+n} = i_n\} \cap B, \{T = m\} | T < \infty, X_T = i)\\ &\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_m = i_0, \dots, X_{m+n} = i_n\} \cap B, \{T = m\} | T < \infty, X_T = i)\end{aligned}$$

da $B \cap \{T = m\}$ ein durch $X_1, \dots, X_m$ bestimmtes Ereignis ist können wir die Markoveigenschaft (siehe Satz 2.8 und (2.8)) und zeitliche Homogenität anwenden und erhalten
$$\begin{aligned}&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)\mathbb{P}(B \cap \{T = m\} | T < \infty, X_T = i)\\ &= \mathbb{P}_i(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} | T < \infty, X_T = i)\\ &= \mathbb{P}_i(\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\})\mathbb{P}(B|T < \infty, X_T = i).\end{aligned}$$
□

Beispiel 2.29. Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum I. Wir definieren eine Folge von Stoppzeiten durch
$$\tau_0 := 0 \quad \text{und} \quad \tau_{m+1} := \inf\{n > \tau_m : X_n \neq X_{\tau_m}\},\ m = 0, 1, 2 \dots .$$

Die Folge (τ_m) registriert also zu welchen Zeitpunkten die Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ springt. Nun definieren wir $Z_n := X_{\tau_n}$ für $n = 0, 1, \ldots$. Mit starker Markoveigenschaft erhalten wir für alle $i_0, \ldots, i_{n+1} \in I$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_{\tau_{n+1}} = i_{n+1} | X_{\tau_0} = i_0, \ldots, X_{\tau_n} = i_n) \\
&\qquad = \mathbb{P}_{i_n}(X_{\tau_1} = i_{n+1}) = \widetilde{p}_{i_n i_{n+1}},
\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{p}_{ii} = 0$ und für $i \neq j$

$$\widetilde{p}_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_{n+1} \neq i, X_n = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)}{\mathbb{P}(X_{n+1} \neq i | X_n = i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k \neq i} p_{ik}}.$$

Also ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix $\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{ij})_{i,j\in I}$ und derselben Startverteilung wie $(X)_{n\geq 0}$.

2.4 Rekurrenz und Transienz

Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P auf dem Zustandsraum I. Für $i, j \in I$ definieren wir

$$\begin{aligned}
f_{ii}^{(n)} &:= \mathbb{P}_i(T_i = n) = \mathbb{P}_i(X_n = i, X_k \neq i, 1 \leq k \leq n-1) \\
f_{ij}^{(n)} &:= \mathbb{P}_i(T_j = n) = \mathbb{P}_i(X_n = j, X_k \neq i, 1 \leq k \leq n-1)
\end{aligned}$$

und

$$f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

wobei T_i in (2.15) definiert wurde. Dann gilt

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_j = n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_j = n) = f_{ij}.$$

Die Größe f_{ij} ist also die W'keit, dass die MK bei Start in i jemals den Zustand j besucht.

Definition 2.30 (Transienz, Rekurrenz)**.** Der Zustand i heißt *rekurrent*, wenn $f_{ii} = 1$ ist und *transient*, wenn $f_{ii} < 1$ ist. Ein rekurrenter Zustand i heißt *positiv rekurrent* falls $\mathbb{E}_i[T_i] < \infty$ und *nullrekurrent*, falls er nicht positiv rekurrent ist.

Im Folgenden kürzen wir *unendlich oft* durch u.o. ab.

Lemma 2.31. *Für alle $i, j \in I$ gilt*

$$\mathbb{P}_i(X_n = j \text{ u.o. }) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f_{jj} < 1, \\ f_{ij} & \text{falls } f_{jj} = 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

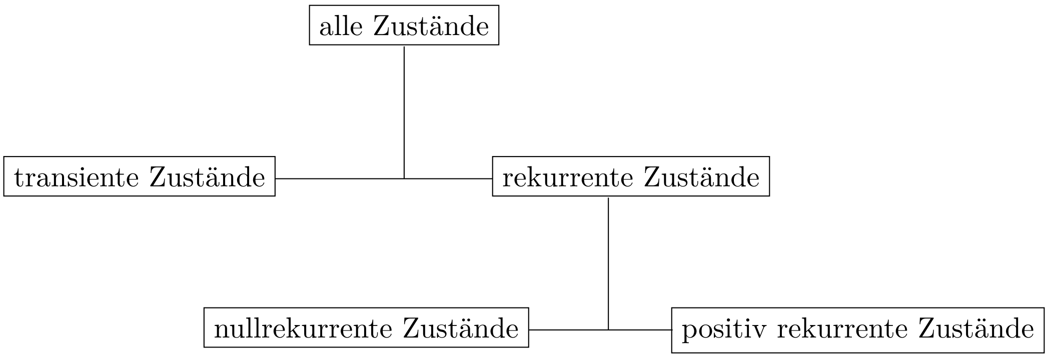

Abbildung 2.7: Klassifikation aller Zustände nach asymptotischen Eigenschaften.

Beweis. Seien $n_1, n_2, \dots, n_k$ so, dass $1 \le n_1 < \dots < n_k$. Wir betrachten das Ereignis $A^{(n_1,\dots,n_k)}$ auf dem $X_{n_1} = X_{n_2} = \dots = X_{n_k} = j$ und $X_m \neq j$ für $m \in \{1, \dots, n_k\} \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$. Mit Markoveigenschaft gilt

$$\mathbb{P}_i(A^{(n_1,\dots,n_k)}) = f_{ij}^{(n_1)} f_{jj}^{(n_2-n_1)} \dots f_{jj}^{(n_k-n_{k-1})}.$$

Die W'keit, dass X_n mindestens k mal den Zustand j besucht ist die Summe davon über alle k-tupel $n_1, \dots, n_k$ mit $1 \le n_1 < \dots < n_k$:

$$\sum_{n_1 \ge 1} f_{ij}^{(n_1)} \sum_{n_2 > n_1} f_{jj}^{(n_2-n_1)} \cdots \sum_{n_k > n_{k-1}} f_{jj}^{(n_k-n_{k-1})} = f_{ij} f_{jj}^{k-1}.$$

Mit $k \to \infty$ erhalten wir (2.18). $\square$

Mit $j = i$ in (2.18) sehen wir, dass das Ereignis $\{X_n = j \text{ u.o. }\}$ ein $0-1$ Gesetz erfüllt:

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ u.o. }) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f_{ii} < 1, \\ 1 & \text{falls } f_{ii} = 1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Man beachte aber, dass die Ereignisse $\{X_n = i\}$ im Allgemeinen nicht unabhängig sind.

Satz 2.32 (Äquivalente Charakterisierungen von Rekurrenz und Transienz)**.**

(i) Rekurrenz von i ist äquivalent zu $\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ u. o.}) = 1$ und zu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

(ii) Transienz von i ist äquivalent zu $\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ u. o.}) = 0$ und zu $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Beweis. Aufgrund von (2.19) bleibt uns nur noch zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow f_{ii} = 1$ (was natürlich auch $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \Leftrightarrow f_{ii} < 1$ zeigt wegen $f_{ii} \in [0,1]$). Es gilt

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_i(X_1 \neq j, \dots, X_{n-k-1} \neq j, X_{n-k} = j, X_n = j) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_i(X_1 \neq j, \dots, X_{n-k-1} \neq j, X_{n-k} = j) \mathbb{P}_j(X_k = j) \qquad (2.20) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nach einer einfachen Indexverschiebung folgt. Damit ist

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \tag{2.21}$$

Mit $j = i$ (wobei $p_{ii}^{(0)} = 1$) gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\\ &= f_{ii}\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = f_{ii}\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\Big).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \;\Rightarrow\; f_{ii} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}} < 1.$$

Nehmen wir nun $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ an. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=k}^{N} p_{ii}^{(n-k)} \le \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} \sum_{l=0}^{N} p_{ii}^{(l)},$$

und somit

$$f_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \ge \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} \ge \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)}} \to 1, \text{ wenn } N \to \infty.$$

□

Beispiel 2.33 (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ uiv Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p \;\text{ und } \mathbb{P}(\xi_1 = -1) = q = 1-p,\; p \in [0,1].$$

Wir betrachten die Irrfahrt $(X_n)_{n\ge 0}$ definiert durch

$$X_0 = 0 \;\text{ und }\; X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \;\text{ für } n \ge 1.$$

Offensichtlich ist die Irrfahrt irreduzibel, weil man von jedem Zustand aus jeden anderen mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichen kann. Wie wir in Satz 2.35 sehen werden, sind Rekurrenz und Transienz Klasseneigenschaften. Also reicht es um Transienz und Rekurrenz zu studieren, sich den Zustand 0 anzuschauen. Wir werden die Kriterien aus Satz 2.32 benutzen. Wegen $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ für alle $n \ge 0$ brauchen wir nur die Übergangswahrscheinlichkeiten zu geraden Zeitpunkten zu betrachten.

Wir erinnern an die Stirling-Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \text{ für } n \to \infty,$$

wobei wir wie üblich $a_n \sim b_n$ schreiben, falls $a_n/b_n \to 1$ gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \\ &\sim \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n n^{2n} e^{-2n}}(pq)^n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}(4pq)^n. \end{aligned}$$

Das Maximum der Funktion $p \mapsto p(1-p)$ auf $[0,1]$ wird in $p = 1/2$ angenommen und der Wert dort ist $1/4$. Also ist $4pq = 1$ falls $p = 1/2$ und $4pq < 1$ falls $p \neq 1/2$.

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} \begin{cases} = \infty & : \text{ falls } p = \frac{1}{2}, \\ < \infty & : \text{ falls } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Also ist die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ nur dann rekurrent, wenn sie symmetrisch ist ($p = 1/2$).

Beispiel 2.34 (Satz von Polya)**.** Eine einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist eine Markovkette $X = (X_n)_{n\geq 0}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{xy} = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & : \text{ falls } y \in \{x \pm e_i : i = 1, \dots, d\}, \\ 0 & : \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Das Teilchen wählt also bei jedem Schritt einen der $2d$ Nachbarorte uniform aus und springt dahin.

Der Satz von Polya besagt, dass X für $d \leq 2$ rekurrent und für $d \geq 3$ transient ist. Im Beispiel 2.33 haben wir bereits gesehen, dass für $d = 1$ die symmetrische einfache Irrfahrt rekurrent ist. Offensichtlich ist X in jeder Dimension irreduzibel. Es reicht also wieder sich den Ursprung anzuschauen. Um die Dimension zu betonen schreiben wir $a_n^{(d)}$ für die Rückkehrwahrscheinlichkeit in den Ursprung nach n Schritten. Natürlich gilt $a_{2n+1}^{(d)} = 0$ wegen Periode 2.

Wir schauen uns hier die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ an und zeigen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{(d)} \begin{cases} = \infty & : d = 2, \\ < \infty & : d = 3. \end{cases}$$

Sei also $d = 2$. Um nach $2n$ Schritten im Ursprung startend dahin wieder zurückzukehren muss die Irrfahrt in eine Richtung genauso viele Schritte machen wie in die entgegengesetzte Richtung. Also muss die Anzahl der Schritte nach rechts gleich der nach links sein und die Anzahl der Schritte nach oben gleich der nach unten. Es ist also

$$a_{2n}^{(2)} = \sum_{u=0}^{n} \frac{(2n)!}{u!u!(n-u)!(n-u)!} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{u=0}^{n} \binom{n}{u} \binom{n}{n-u} = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2,$$

wobei wir die kombinatorische Identität $\sum_{u=0}^{n} \binom{n}{u}\binom{n}{n-u} = \binom{2n}{n}$ benutzt haben. Mit Stirling-Formel erhalten wir

$$a_{2n}^{(2)} \sim \frac{1}{\pi n}, \text{ und daher } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{(2)} = \infty.$$

Um im Fall $d = 3$ nach $2n$ Schritten wieder in den Ursprung zurückzukehren muss die Irrfahrt in jeder der drei Dimensionen dieselbe Anzahl von Schritten in die positive und die negative Richtung machen. Wir erhalten

$$a_{2n}^{(3)} = \sum_{\substack{u,v,w\geq 0\\ u+v+w=n}} \frac{(2n)!}{u!u!v!v!w!w!}\frac{1}{6^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{3^n}\sum_{\substack{u,v,w\geq 0\\ u+v+w=n}} \binom{n}{u,v,w}^2\frac{1}{3^n},$$

wobei $\binom{n}{u,v,w} = \frac{n!}{u!v!w!}$ für $u, v, w \geq 0$ mit $u + v + w = n$ der Multinomialkoeffizient ist. Es gilt

$$\sum_{\substack{u,v,w\geq 0\\ u+v+w=n}} \binom{n}{u,v,w}\frac{1}{3^n} = 1.$$

Am leichtesten sieht man das ein, wenn man sich klarmacht, dass hier Wahrscheinlichkeitsgewichte der Multinomialverteilung Mult $\big(n, (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\big)$ aufsummiert werden.

Ferner gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\binom{3m}{u,v,w} \leq \binom{3m}{m,m,m} \qquad \text{für alle } u, v, w \geq 0 \text{ mit } u + v + w = 3m$$

und somit bekommt man wieder mit der Stirling-Formel (für eine geeignete Konstante C)

$$a_{6m}^{(3)} \leq \binom{6m}{3}\frac{1}{2^{6m}}\binom{3m}{m,m,m}\frac{1}{3^{3m}} \sim C\frac{1}{m^{3/2}}.$$

Es folgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{6m}^{(3)} < \infty.$$

Mit $a_{6m}^{(3)} \geq (\frac{1}{6})^2 a_{6m-2}^{(3)}$ und $a_{6m}^{(3)} \geq (\frac{1}{6})^4 a_{6m-4}^{(3)}$ für alle $m \geq 1$ erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^{(3)} \leq 6^4 \sum_{m=0}^{\infty} a_{6m}^{(3)} < \infty.$$

Also ist die Irrfahrt in $d = 3$ transient.

Satz 2.35. *Ist $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible Markovkette, so gilt eine der folgenden Alternativen:*

(i) Alle Zustände sind transient, $\mathbb{P}_i(\bigcup_{j\in I}\{X_n = j \text{ u.o.}\}) = 0$ für alle $i \in I$, und $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ für alle $i, j \in I$.

(ii) Alle Zustände sind rekurrent, $\mathbb{P}_i(\bigcap_{j\in I}\{X_n = j \text{ u.o.}\}) = 1$ für alle $i \in I$, und $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty$ für alle $i, j \in I$.

Insbesondere sind Rekurrenz und Transienz Klasseneigenschaften.

Beweis. Nach Voraussetzung sind alle Zustände kommunizierend. Nach Definition kommunizieren i und j genau dann, wenn es ein m und ein n gibt mit $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $p_{ji}^{(n)} > 0$. Damit ist $\alpha := p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)}$ positiv. Mit einer offensichtlichen Verallgemeinerung von (2.13) gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(n)} = \alpha p_{jj}^{(k)},$$

und

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)} = \alpha p_{ii}^{(k)}.$$

Damit sind entweder beide Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$ konvergent oder divergent, was nach Satz 2.32 gleichbedeutend damit ist, dass entweder beide Zustände transient oder rekurrent sind.

Betrachten wir zunächst den transienten Fall. Dann ist nach Lemma 2.31 $\mathbb{P}_i(X_n = j \text{ u.o.}) = 0$ für alle i und j und somit $\mathbb{P}_i(\cup_j \{X_n = j \text{ u.o.}\}) = 0$. Außerdem gilt mit (2.21)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = f_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}.\end{aligned}$$

Im transienten Fall konvergiert die Reihe auf der rechten und somit auch auf der linken Seite.

Sei nun j ein rekurrenter Zustand. Dann gilt nach Satz 2.32 $\mathbb{P}_j(X_n = j \text{ u.o.}) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}p_{ji}^{(m)} &= \mathbb{P}_j(X_m = i) = \mathbb{P}_j(X_m = i \cap \{X_n = j \text{ u.o.}\}) \\ &\leq \sum_{n>m} \mathbb{P}_j(X_m = i, X_{m+1} \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j) \\ &= \sum_{n>m} p_{ji}^{(m)} f_{ij}^{(n-m)} = p_{ji}^{(m)} f_{ij}.\end{aligned}$$

Wegen Irreduzibilität gibt es ein $m > 0$ für das $p_{ji}^{(m)} > 0$ ist, und deswegen muss $f_{ij} = 1$ gelten. Mit Lemma 2.31 folgt $\mathbb{P}_i(X_n = j \text{ u.o.}) = 1$. Da dies für alle i, j gilt, folgt $\mathbb{P}_i(\bigcap_{j \in I} \{X_n = j \text{ u.o.}\}) = 1$. Nehmen wir an, dass es i und j gibt, so dass die Reihe $\sum_{ij}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ konvergiert. Mit Borel-Cantelli Lemma folgt dann $\mathbb{P}_i(X_n = j \text{ u.o.}) = 0$, was zu einem Widerspruch führt. □

Da Transienz und Rekurrenz Klasseneigenschaften sind sprechen wir bei irreduziblen Markovketten von *rekurrenten* bzw. *transienten* Markovketten.

Korollar 2.36. *Eine irreduzible Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum ist rekurrent.*

Beweis. Es sei $|I|$ die Anzahl der Zustände der Markovkette. Nehmen wir an, dass $\sum_n p_{ij}^{(n)} < \infty$ für alle $i, j \in I$ gilt. Für festes i gibt es ein j^*, so dass die Summe maximal ist. Es folgt

$$\sum_n p_{ij}^{(n)} \leq \sum_j \sum_n p_{ij}^{(n)} \leq |I| \sum_n p_{ij^*}^{(n)} < \infty.$$

Wegen $\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1$ gilt aber

$$\sum_j \sum_n p_{ij}^{(n)} = \sum_n \sum_j p_{ij}^{(n)} = \infty,$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist die erste Alternative bei irreduziblen Markovketten auf endlichen Zustandsräumen nicht möglich. □

Bemerkung 2.37. Für (nicht notwendigerweise irreduzible) Markovketten auf endlichen Zustandsräumen stimmen die Begriffe *wesentlich* und *rekurrent* überein. Genauso stimmen die Begriffe *unwesentlich* und *transient* überein. Auf unendlichen Zustandsräumen unterscheiden sie sich aber.

Beispiel 2.38. Bei einer symmetrischer einfacher Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ wird für $d \leq 2$ jeder Punkt mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft besucht. Für $d \geq 3$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür 0, was bedeutet, dass das Teilchen gegen unendlich geht. Für alle $d \geq 1$ sind jeweils alle Zustände wesentlich, für $d \geq 3$ aber transient.

2.5 Invariante Verteilungen

In diesem Abschnitt betrachten wir invariante Verteilungen und invariante Maße von Markovketten. Unter einem Maß auf dem abzählbarem Zustandsraum I verstehen wir einen durch I indizierten Zeilenvektor mit nicht-negativen Einträgen. Bevor wir eine genaue Definition angeben, schauen wir uns ein Beispiel an.

Beispiel 2.39 (Markovkette mit zwei Zuständen)**.** In Beispiel 2.4 haben wir uns eine Markovkette auf $I = \{1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

angeschaut. Für $\alpha, \beta \in (0, 1)$ (die anderen Fälle sind uninteressant) kann man zeigen (vgl. Aufgabe 3 auf Blatt 2), dass für $\pi = (\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\right)$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \pi_1 + (\alpha + \beta - 1)^n \left(\mathbb{P}(X_0 = 1) - \pi_1\right)$$

gilt. Daraus folgt natürlich

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) = \pi_2 + (\alpha + \beta - 1)^n \left(\mathbb{P}(X_0 = 2) - \pi_2\right).$$

Wir können daran Folgendes ablesen:

(i) Ist $(\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2)) = \pi$ die Anfangsverteilung, dann verschwinden die zweiten Summanden auf der rechten Seite in den beiden oberen Displays. Es folgt

$$(\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2)) = \pi \quad \text{für alle } n \geq 0. \tag{2.22}$$

Das heißt die Verteilung der Markovkette zu jedem Zeitpunkt stimmt mit der Anfangsverteilung überein. Wie man leicht nachrechnen kann gilt $\pi P = \pi$, woraus (2.22) natürlich auch sofort folgt.

(ii) Starten wir die Markovkette in einer anderen Verteilung, dann konvergiert für $n \to \infty$ die Verteilung $(\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$ exponentiell schnell gegen π.

Wegen (i) kann man π als eine Gleichgewichtsverteilung interpretieren. Dann besagt (ii), dass eine nicht im Gleichgewicht gestartete Markovkette sich dem Gleichgewichtszustand asymptotisch nähert.

Definition 2.40 (Invariante Verteilung, invariantes Maß)**.** Wir sagen, dass ein Maß $(\pi_i)_{i \in I}$ ein *invariantes Maß* für die Markovkette mit Übergangsmatrix P ist, wenn

$$\pi P = \pi \tag{2.23}$$

gilt. Wenn zusätzlich $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$ gilt, dann nennen wir π *invariante Verteilung.*

Ist π eine invariante Verteilung und starten wir die Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ in π, dann gilt nach Satz 2.10

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = i) = (\pi P^n)_i = (\pi P P^{n-1})_i = (\pi P^{n-1})_i = \cdots = \pi_i = \mathbb{P}_\pi(X_0 = i).$$

Also verändert sich die Verteilung der Markovkette nicht, wenn man sie in der invarianten Verteilung startet. Oft wird invariante Verteilung auch als *Gleichgewichtsverteilung* oder als *stationäre Verteilung* bezeichnet. Letzterer Name kommt daher, dass Markovketten, die in ihrer invarianten Verteilung gestartet werden, *stationär* sind: Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ haben

$$(X_0, \ldots, X_m) \quad \text{und} \quad (X_n, \ldots, X_{m+n})$$

dieselbe Verteilung (sind aber natürlich nicht unabhängig, auch wenn sie sich nicht überlappen).

Bemerkung 2.41. Auf endlichen Zustandsräumen besagt (2.23), dass π ein Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1 ist. Also kann man mit Mitteln der Linearen Algebra eine Invariante Verteilung bestimmen. Dazu muss man einen Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1 finden mit nicht-negativen Einträgen, wovon mindestens einer positiv sein sollte. Diesen Eigenvektor kann man dann so normieren, dass die Summe der Einträge 1 ist, was einer Verteilung entspricht.

Das folgende Majorantenkriterium von Weierstraß werden wir im Beweis des nachfolgenden Satzes benöigen.

Lemma 2.42 (Weierstraßscher M-Test)**.** *Für $(x_{n,k})_{n,k=1,2,\ldots}$ seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Für alle k gilt $\lim_n x_{n,k} = x_k$,

(ii) Für alle n und k gilt $|x_{n,k}| \leq M_k$, wobei $\sum_k M_k < \infty$.

Dann konvergieren $\sum_k x_k$ und $\sum_k x_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$ absolut. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k x_{n,k} = \sum_k x_k. \tag{2.24}$$

Beweis. Für jedes n ist nach Voraussetzung

$$\sum_k |x_{n,k}| \leq \sum_k M_k < \infty$$

und mit dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\sum_k |x_k| = \sum_k \lim_n |x_{n,k}| = \sum_k \liminf_n |x_{n,k}| \leq \liminf_n \sum_k |x_{n,k}| \leq \sum_k M_k < \infty$$

Es bleibt nur (2.24) zu zeigen. Für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_k x_{n,k} - \sum_k x_k \right| \leq \sum_{k \leq k_0} |x_{n,k} - x_k| + 2 \sum_{k > k_0} M_k.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählen wir zuerst k_0 so, dass $\sum_{k>k_0} M_k \leq \varepsilon/3$ und dann n_0 so, dass $|x_{n,k} - x_k| < \varepsilon/(3k_0)$ für $k \leq k_0$. Dann gilt $|\sum_k x_{n,k} - \sum_k x_k| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$. □

In dem folgenden Satz geht es um Konsequenzen aus Irreduzibilität, Aperiodizität und Existenz invarianter Verteilungen.

Satz 2.43 (Rekurrenz der MK, Eindeutigkeit und Positivität invarianter Verteilung)**.** *Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible und aperiodische Markovkette mit Zustandsraum I, Übergangsmatrix P und invarianter Verteilung π, d.h. $\pi_i \geq 0$ und $\sum_i \pi_i = 1$. Dann ist die Markovkette rekurrent, $\pi_j > 0$ für alle $j \in I$ und*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \ \text{ für alle } i, j \in I. \tag{2.25}$$

Außerdem ist die invariante Verteilung eindeutig.

Die Gleichung (2.25) besagt unter anderem, dass eine Markovkette, die die Bedingungen des Satzes erfüllt, die Anfangsverteilung "vergisst". Ist nämlich $\nu = (\nu_i)_{i\in I}$ eine Verteilung auf I, dann gilt

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = j) = \sum_{i\in I} \nu_i p_{ij}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \pi_j \sum_{i\in I} \nu_i = \pi_j.$$

Das erklärt den Begriff Gleichgewichtsverteilung.

Beweis von Satz 2.43. Zunächst zeigen wir die Rekurrenz. Nehmen wir an, dass die Markovkette transient ist. Dann gilt nach Satz 2.35 $p_{ij}^{(n)} \to 0$ für alle i, j. Wegen $\pi_j p_{ji}^{(n)} \leq \pi_j$ und $\sum_j \pi_j = 1$ können wir den M-Test anwenden und erhalten $\pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji}^{(n)} \to 0$ für alle i, was zu einem Widerspruch führt.

Für Eindeutigkeit und Konvergenz verwenden wir ein Kopplungsargument. Wir definieren eine Markovkette $(Z_n, Y_n)_{n\geq 0}$, genannt *Kopplung*, auf $I \times I$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\tilde{p}((i,j),(k,l)) = p_{ik}p_{jl}. \tag{2.26}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass $\widetilde{P} = (\tilde{p}((i,j),(k,l)))_{(i,j),(k,l)\in I\times I}$ eine stochastische Matrix ist und dass $\tilde{\pi}$ mit $\tilde{\pi}((i,j)) = \pi_i\pi_j$ eine invariante Verteilung der gekoppelten Markovkette ist.

Für alle i, j, k, l gibt es nach Satz 2.21(iii) ein n_0 mit $\tilde{p}^{(n)}((i,j),(k,l)) = p_{ik}^{(n)}p_{jl}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist die gekoppelte Markovkette irreduzibel und aperiodisch. Insbesondere gilt mit dem Argument vom Anfang des Beweises, dass die gekoppelte Kette rekurrent ist. Für jedes $i_0 \in I$ und alle Startbedingungen (i, j) gilt also

$$\mathbb{P}_{(i,j)}((Z_n, Y_n) = (i_0, i_0) \text{ u.o.}) = 1.$$

Die Stoppzeit $\tau = \inf\{n \geq 0 : (Z_n, Y_n) = (i_0, i_0)\}$ ist fast sicher endlich, d.h. für alle $(i, j) \in I \times I$ gilt

$$\mathbb{P}_{(i,j)}(\tau < \infty) = 1. \tag{2.27}$$

Mit starker Markoveigenschaft erhalten wir

$$\mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k, \tau \leq n) = \mathbb{P}_{(i,j)}(Y_n = k, \tau \leq n),$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k) &= \mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k, \tau \leq n) + \mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k, \tau > n) \\
&\leq \mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k, \tau \leq n) + \mathbb{P}_{(i,j)}(\tau > n) \\
&= \mathbb{P}_{(i,j)}(Y_n = k, \tau \leq n) + \mathbb{P}_{(i,j)}(\tau > n) \\
&\leq \mathbb{P}_{(i,j)}(Y_n = k) + \mathbb{P}_{(i,j)}(\tau > n)
\end{aligned}$$

und eine analoge Ungleichung mit vertauschten Rollen von Y_n und Z_n

$$\mathbb{P}_{(i,j)}(Y_n = k) \leq \mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k) + \mathbb{P}_{(i,j)}(\tau > n).$$

Es folgt

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| = \Big|\mathbb{P}_{(i,j)}(Z_n = k) - \mathbb{P}_{(i,j)}(Y_n = k)\Big| \leq \mathbb{P}_{(i,j)}(\tau > n).$$

Wegen (2.27) konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $n \to \infty$. Nach Voraussetzung ist π eine invariante Verteilung. Also gilt

$$\pi_k - p_{jk}^{(n)} = \sum_i \pi_i p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)} \sum_i \pi_i = \sum_i \pi_i (p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}).$$

Dir rechte Seite konvergiert gegen Null nach dem M-Test und wir erhalten

$$\lim_n p_{jk}^{(n)} = \pi_k \quad \text{für alle } j, k.$$

Weil dies für jede invariante Verteilung π gilt, kann es höchstens eine geben.

Es bleibt die Positivität von π zu zeigen. Nach Voraussetzung gibt es mindestens ein i mit $\pi_i > 0$, ansonsten wäre π keine Verteilung. Da alle Zustände miteinander kommunizieren, können wir für jedes $j \in I$, k und l so wählen, dass $p_{ji}^{(k)}$ und $p_{ij}^{(l)}$ positiv sind. Nun gilt

$$p_{jj}^{(k+n+l)} \geq p_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(l)}$$

und mit $n \to \infty$ auf beiden Seiten folgt

$$\pi_j \geq p_{ji}^{(k)} \pi_i p_{ij}^{(l)} > 0,$$

was die Positivität von π_j zeigt. □

In den nächsten Resultaten stellen wir eine Verbindung her zwischen der Zeit, die eine Markovkette in einem Zustand verbringt und dem Gewicht der invarianten Verteilung in diesem Zustand. Schaut man sich die Abbildung 2.5 (B) an, so ist es intuitiv klar, dass die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Zustand 1 anzutreffen höher sein muss, als bei den anderen Zuständen. Es wird sich herausstellen, dass diese Intuition bei positiv rekurrenten Markovketten richtig ist.

Für $k \in I$ definieren wir den Zeilenvektor $\gamma^k := (\gamma_i^k : i \in I)$ durch

$$\gamma_i^k = \mathbb{E}_k \left[\sum_{n=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \right], \tag{2.28}$$

γ_i^k ist also die *erwartete Anzahl der Besuche in i zwischen Besuchen in k.*

Satz 2.44. *Es sei $X = (X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine irreduzible und rekurrente MK. Dann gilt:*

(i) $\gamma_k^k = 1$,

(ii) γ^k *ist ein invariantes Maß, d.h.* $\gamma^k P = \gamma^k$,

(iii) $0 < \gamma_i^k < \infty$ *für alle* $i \in I$.

Beweis. (i) ist klar.

(ii): Nach Annahme ist $\mathbb{P}_k(T_k < \infty) = 1$. Wegen $X_0 = X_{T_k} = k$ fast sicher, gilt

$$
\begin{aligned}
\gamma_j^k &= \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=j \text{ und } n\le T_k\}}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_n = j \text{ und } n \le T_k) = \sum_{i\in I}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_n = j, X_{n-1} = i, \text{ und } n \le T_k) \\
&= \sum_{i\in I} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_{n-1} = i, \text{ und } n \le T_k) = \sum_{i\in I} p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_k(X_m = i, \text{ und } m \le T_k - 1) \\
&= \sum_{i\in I} p_{ij} \mathbb{E}_k\left[\sum_{m=0}^{T_k-1} \mathbb{1}_{\{X_m=i\}}\right] = \sum_{i\in I} \gamma_i^k p_{ij}.
\end{aligned}
$$

(iii): Wegen Irreduzibilität, gibt es zu $i \in I$ Zeitpunkte $n, m \geq 0$ so, dass $p_{ik}^{(n)}, p_{ki}^{(m)} > 0$. Aus (ii) folgt $\gamma^k = \gamma^k P^{(N)}$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Also haben wir $\gamma_i^k \geq \gamma_k^k p_{ki}^{(m)} > 0$ und $\gamma_i^k p_{ik}^{(n)} \leq \gamma_k^k = 1$, wobei die letzte Gleichung mit (i) folgt. □

Satz 2.45. *Es sei P irreduzibel und sei λ ein invariantes Maß für P mit $\lambda_k = 1$. Dann gilt $\lambda \geq \gamma^k$ komponentenweise. Ferner gilt $\lambda = \gamma^k$ falls P außerdem noch rekurrent ist.*

Beweis. Für jedes $j \in I$ gilt

$$
\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{i_1\in I} \lambda_{i_1} p_{i_1 j} = \sum_{i_1\neq k} \lambda_{i_1} p_{i_1 j} + p_{kj} \\
&= \sum_{i_1,i_2\neq k} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j} + \sum_{i_1\neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + p_{kj} \\
&\vdots \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_n\neq k} \lambda_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \dots p_{i_1 j} \\
&\quad + \Big(p_{kj} + \sum_{i_1\neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + \dots + \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}\neq k} p_{k i_{n-1}} \dots p_{i_2 i_1} p_{i_1 j}\Big).
\end{aligned}
$$

Durch weglassen des ersten Summanden nach der letzten Gleichheit erhalten wir für $j \neq k$

$$
\lambda_j \geq \mathbb{P}_k(X_1 = j \text{ und } T_k \geq 1) + \mathbb{P}_k(X_2 = j \text{ und } T_k \geq 2) + \dots + \mathbb{P}_k(X_n = j \text{ und } T_k \geq n).
$$

Die rechte Seite konvergiert gegen γ_j^k für $n \to \infty$, was $\lambda \geq \gamma^k$ zeigt. Ist P rekurrent, so ist γ^k invariant nach Satz 2.44. Damit ist auch $\mu = \lambda - \gamma^k$ ein invariantes Maß. Da P irreduzibel ist, gibt es für jedes $i \in I$ ein n mit $p_{ik}^{(n)} > 0$. Es folgt

$$
0 = \mu_k = \sum_{j\in I} \mu_j p_{jk}^{(n)} \geq \mu_i p_{ik}^{(n)}.
$$

Das ist nur möglich, wenn $\mu_i = 0$ ist. □

Im Folgenden bezeichnen wir mit m_i die erwartete Rückkehrzeit in den Zustand i, d.h. $m_i = \mathbb{E}_i[T_i]$. Laut Definition 2.30 ist i positiv rekurrent falls $m_i < \infty$ und nullrekurrent falls $m_i = \infty$.

Satz 2.46. *Es sei $X = (X_n)_{n=0,1,\dots}$ eine irreduzible MK. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) jeder Zustand ist positiv rekurrent,

(ii) ein Zustand ist positiv rekurrent,

(iii) X hat eine invariante Verteilung π.

Ferner gilt

$$\pi_i = \frac{1}{m_i}, \quad i \in I, \tag{2.29}$$

für die invariante Verteilung π aus (iii).

Bemerkung 2.47. Es gibt einen allgemeineren Satz aus dem die Formel (2.29) unter den gegebenen Voraussetzungen sofort folgt. Und zwar besagt der Wiederkehrsatz von Kac (siehe Kac 1947): Ist $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ eine stationäre Folge mit der stationären Verteilung π und mit m_i und T_i wie zuvor, dann gilt

$$m_i \pi_i = \mathbb{P}_\pi(T_i < \infty). \tag{2.30}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.46 ist natürlich die rechte Seite gleich 1, woraus (2.29) folgt. Deswegen wird (2.29) manchmal als Kac's Formel bzw. die Aussage als Kac's Theorem bezeichnet.

Überlegen Sie sich, was man aus (2.30) ablesen kann, wenn $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Markovkette mit einer stationären Verteilung π und einem transienten Zustand i ist. Was kann man dann über die Übergangsmatrix und π_i sagen.

Beweis von Satz 2.46. $(i) \Rightarrow (ii)$ ist klar.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ist i ein positiv rekurrenter Zustand, dann ist er rekurrent. Da Rekurrenz eine Klasseneigenschaft ist und P irreduzibel ist, ist P rekurrent. Nach Satz 2.44 ist γ^i ein invariantes Maß. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} \gamma^i_j &= \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{T_i-1} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{T_i-1}\sum_{j\in I} \mathbb{1}_{\{X_n=j\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{T_i-1} \mathbb{1}_{\{X_n\in I\}}\right] = \mathbb{E}_i[T_i] = m_i.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $m_i < \infty$ und damit ist $\pi = \gamma^i/m_i$ eine invariante Verteilung.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $k \in I$. Aus Irreduzibilität und $\sum_{i\in I} \pi_i = 1$ folgt $\pi_k = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ik}^{(n)} > 0$ für ein geeignetes n. Wir setzen $\lambda_i = \pi_i/\pi_k$. Dann ist λ ein invariantes Maß mit $\lambda_k = 1$. Damit ist nach Satz 2.45 $\lambda \geq \gamma^k$ und daher

$$m_k = \sum_{i\in I} \gamma_i^k \leq \sum_{i\in I} \lambda_i = \frac{1}{\pi_k} < \infty. \tag{2.31}$$

Das zeigt, dass k positiv rekurrent ist.

Es bleibt nur noch $\pi_i = 1/m_i$ zu zeigen. Aus (2.31) folgt die positive Rekurrenz jedes Zustandes und insbesondere die Rekurrenz von P. Bei Rekurrenz gilt nach Satz 2.45 in (2.31) aber Gleichheit, was den Beweis beendet. □

Satz 2.48. *Hat eine aperiodische, irreduzible Markovkette auf I keine stationäre Verteilung, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \tag{2.32}$$

für alle $i, j \in I$.

Beweis. Nach dem Argument im Beweis von Satz 2.43 ist die gekoppelte Markovkette irreduzibel. Ist sie transient, so konvergiert $\sum_n (p_{ij}^{(n)})^2$ nach Satz 2.35 und (2.32) folgt.

Nehmen wir nun an, dass die gekoppelte Markovkette rekurrent ist. Dann gilt wie im Beweis von Satz 2.43

$$|p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{2.33}$$

für alle $i, j, k \in I$. Nehmen wir an, es gibt i, k mit $p_{ik}^{(n)} \not\to 0$ für $n \to \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{n'\}$ und ein $\delta > 0$, so dass $p_{ik}^{(n')} \in [\delta, 1]$ entlang dieser Teilfolge. Diese widerum muss konvergente Teilteilfolgen enthalten. Wegen (2.33) hängt der Grenzwert nicht von i ab. Insgesamt gibt es also Teilfolgen $\{n''\}$ von $\{n\}$ so dass

$$\lim_{n''\to\infty} p_{ik}^{(n'')} = \alpha_k$$

für alle i, k. Dabei sind α_k nichtnegativ und positiv für manche k. Wenn M eine endliche Teilmenge von I ist, dann gilt

$$\sum_{k\in M} \alpha_k = \lim_{n''} \sum_{k\in M} p_{ik}^{(n'')} \leq 1,$$

und somit $0 < \alpha := \sum_{k\in I} \alpha_k \leq 1$. Es gilt

$$\sum_{k\in M} p_{ik}^{(n'')} p_{kj} \leq p_{ij}^{(n''+1)} = \sum_{k\in I} p_{ik} p_{kj}^{(n'')}.$$

Mit $n'' \to \infty$ in dieser Ungleichung (auf der lnken Seite nutzen wir die Endlichkeit von M und auf der rechten den M-Test) erhalten wir

$$\sum_{k\in M} \alpha_k p_{kj} \leq \sum_{k\in I} p_{ik} \alpha_j = \alpha_j.$$

Wir nehmen $M \uparrow I$ und nutzen die Unabhängigkeit der obigen Ungleichung von M aus und erhalten

$$\sum_{k\in I} \alpha_k p_{kj} \leq \alpha_j. \tag{2.34}$$

Gilt strickte Ungleichung in (2.34) für ein j, so folgt

$$\sum_{k\in I} \alpha_k = \sum_{k\in I} \alpha_k \sum_{j\in I} p_{kj} = \sum_{k\in I}\sum_{j\in I} \alpha_k p_{kj} = \sum_{j\in I}\sum_{k\in I} \alpha_k p_{kj} < \sum_{j\in I} \alpha_j,$$

was zu einem Widerspruch führt. Also gilt $\sum_{k\in I} \alpha_k p_{kj} = \alpha_j$ für alle j und durch $\pi_j = \alpha_j/\alpha$ ist eine stationäre Verteilung definiert, was wiederum ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Satz und einem Korollar ab in denen wir die Resultate dieses und des vorhergehenden Abschnittes für irreduzible und aperiodische Markovketten zusammenfassen bzw. für Spezialfälle explizit formulieren.

Satz 2.49. *Für eine irreduzible, aperiodische Markovkette gilt eine der folgenden Alternativen:*

(i) Die Markovkette ist transient. Für alle i, j gilt $\lim_n p_{ij}^{(n)} = 0$ und zwar so schnell, dass $\sum_n p_{ij}^{(n)} < \infty$.

(ii) Die Markovkette ist nullrekurrent und es gibt keine invariante Verteilung. Für alle i, j gilt $\lim_n p_{ij}^{(n)} = 0$, aber so langsam, dass $\sum_n p_{ij}^{(n)} = \infty$ und $m_j = \infty$.

(iii) Die Markovkette ist positiv rekurrent. Es gibt eine invariante Verteilung π. Für alle i, j gilt $\lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ und $m_j = 1/\pi_j$.

Da das asymptotische Verhalten von $p_{ij}^{(n)}$ in den drei Fällen unterschiedlich ist, bestimmen diese asymptotische Eigenschaften die Zugehörigkeit der Markovkette zu einer der Klassen.

Satz 2.50 (MK auf endlichen Zustandsräumen)**.** *Es sei $X = (X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine MK auf einem endlichen Zustandsraum I und Übergangsmatrix P. Dann gilt:*

(i) X besitzt eine invariante Verteilung (i.A. mehr als eine möglich!).

(ii) Ist X irreduzibel, so auch positiv rekurrent und besitzt genau eine invariante Verteilung π.

(iii) Ist X irreduzibel und aperiodisch, so gilt auch

$$p_{ij}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \pi_j > 0, \quad \text{für alle } i, j \in I.$$

Beweis. (i) Als stochastische Matrix besitzt die Übergangsmatrix P von X einen Eigenwert 1. Mit Perron-Frobenius Theorem kann man sich überlegen (Details lassen wir an dieser Stelle weg), dass 1 der größte Eigenwert ist und dass die zugehörigen Eigenvektoren positiv sind. Die Normierung eines linksseitigen Eigenvektors zum Eigenwert 1 auf Gesamtsumme 1 liefert eine invariante Verteilung.

(ii) In Korollar 2.36 haben wir bereits gesehen, dass irreduzible MK auf endlichen Zustandsräumen rekurrent sind. Wir behaupten in (ii) aber mehr als das und argumentieren anders.

Nach (i) besitzt X eine invariante Verteilung. Nach Satz 2.46 folgt mit Irreduzibilität die positive Rekurrenz der MK und die Eindeutigkeit der invarianten Verteilung.

(iii) Nach Voraussetzung ist X irreduzibel und aperiodisch und hat nach (i) eine invariante Verteilung. Die Behauptung folgt also mit Satz 2.43. $\square$

2.6 Zeitumkehr und reversible Markovketten

In diesem Abschnitt schauen wir uns reversible Markovketten an. Das sind Markovketten, bei denen die Vorwärts- und Rückwärtsevolution dieselben sind.

Satz 2.51. *Es sei P eine irreduzible Übergangsmatrix mit invarianter Verteilung π. Ferner sei $(X_n)_{0\le n\le N}$ MK-(π, P) und $Y_n = X_{N-n}$. Dann ist $(Y_n)_{0\le n\le N}$ MK-$(\pi, \widehat{P})$, wobei $\widehat{P} = (\widehat{p}_{ij})_{i,j\in I}$ mit*

$$\widehat{p}_{ji} = \frac{\pi_i}{\pi_j} p_{ij} \quad \text{für alle } i, j. \tag{2.35}$$

Außerdem ist $\widehat{P}$ irreduzibel mit invarianter Verteilung π.

Beweis. Da π invariant für P ist, gilt für alle j

$$\sum_{i\in J} \widehat{p}_{ji} = \frac{1}{\pi_j} \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij} = 1$$

und somit ist $\widehat{P}$ eine stochastische Matrix. Aus

$$\sum_{j\in I} \pi_j \widehat{p}_{ji} = \sum_{j\in I} \pi_i p_{ij} = \pi_i \sum_{j\in I} p_{ij} = \pi_i$$

folgt, dass π invariant für $\widehat{P}$ ist.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_2 = i_1, \dots, Y_N = i_N) &= \mathbb{P}(X_0 = i_N, X_1 = i_{N-1}, \dots, X_N = i_0) \\
&= \pi_{i_N} p_{i_N i_{N-1}} \dots p_{i_1 i_0} \\
&= \pi_{i_N} \frac{\pi_{i_{N-1}}}{\pi_{i_N}} \widehat{p}_{i_{N-1} i_N} \dots \frac{\pi_{i_0}}{\pi_{i_1}} \widehat{p}_{i_0 i_1} \\
&= \pi_{i_0} \widehat{p}_{i_0 i_1} \dots \widehat{p}_{i_{N-1} i_N}.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.6 (besser gesagt nach einer Version davon mit endlicher Zeit) ist $(Y_n)_{0\le n\le N}$ MK-$(\pi, \widehat{P})$.

Es bleibt noch die Irreduzibilität von $\widehat{P}$ zu zeigen. Für alle i, j gibt es $i_1, \dots, i_n$ so dass $i_1 = i$, $i_n = j$ und $p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} > 0$. Damit gilt

$$\widehat{p}_{i_n i_n - 1} \dots \widehat{p}_{i_2 i_1} = \frac{\pi_{i_1}}{\pi_{i_n}} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} > 0,$$

was die Irreduzibilität von $\widehat{P}$ zeigt. □

Die Markovkette $(Y_n)_{0\le n\le N}$ heißt die *Zeitumkehr (engl. time-reversal)* von $(X_n)_{0\le n\le N}$.

Definition 2.52. Ein Maß ν heißt *reversibel* bezüglich einer Übergangsmatrix P, wenn ν und P die *detailed balance - Bedingung* erfüllen: für alle $i, j \in I$

$$\nu_i p_{ij} = \nu_j p_{ji}. \tag{2.36}$$

Die detailed balance - Bedingung läßt sich wie folgt interpretieren: Ist ν die gegenwärtige Verteilung der Markovkette, dann "fließt" im nächsten Schritt genauso viel Masse von i nach j wie von j nach i. Deswegen ist das folgende Resultat nicht überraschend.

Lemma 2.53. *Ist ν* reversibel *bezüglich P, dann ist ν invariant für P.*

Beweis. Es gilt $(\nu P)_i = \sum_{j\in I} \nu_j p_{ji} = \sum_{j\in I} \nu_i p_{ij} = \nu_i$. □

Bemerkung 2.54.

1. Ist ν *reversibel* bezüglich P und ist $(X_n)_{n\geq 0}$ MK-(ν, P), dann ist auch für jedes N die Zeitumkehr von $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ MK-$(\pi, \widehat{P})$, d.h. $P = \widehat{P}$. Aus diesem Grund nennt man Markovketten bei denen die Anfangsverteilung und die Übergangsmatrix die detailed balance - Bedingung erfüllen auch *reversibel.*
2. Zeitumkehr von Markovketten kann nur bezüglich der invarianten Verteilung sinnvoll definiert werden (wenn es auch Markovsch werden soll).

Beispiel 2.55 (Nicht reversible Markovkette)**.** Wir Betrachten die Markovkette mit Übergangsgraphen aus Abb. 2.8.

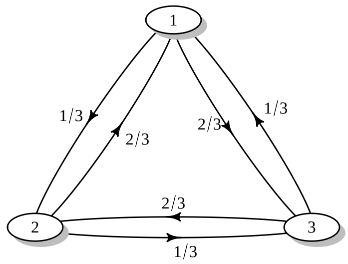

Abbildung 2.8: Beispiel einer nicht reversiblen Markovkette

Die Übergangsmatrix ist die *doppelt stochastische* Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ ist eine invariante Verteilung. Also ist $\widehat{P} = P^T$. Da aber P nicht symmetrisch ist, ist die Markovkette nicht reversibel. Außerdem würde man durch Beobachten der Markovkette in etwa beurteilen können ob die Markovkette gerade "vorwärts" oder "rückwärts" läuft. Während die Markovkette vorwärts in der Zeit eher im Urzeigersinn läuft, läuft die Zeitumkehr eher gegen den Uhrzeigersinn.

Beispiel 2.56 (Ehrenfest Modell)**.** Es sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ und Übergangsmatrix $P = \big(p(i,j)\big)_{i,j\in S}$, wobei

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N}, \quad p(i, i-1) = \frac{i}{N}.$$

In der Übung haben wir bereits gesehen, dass π mit $\pi(j) = 2^{-N}\binom{N}{j}$ eine invariante Verteilung ist. Für $i \in \{0, \dots, N-1\}$ gilt aber sogar

$$\begin{aligned}\pi_i p_{i,i+1} &= 2^{-N}\binom{N}{i}\frac{N-i}{N} = 2^{-N}\frac{N!}{i!(N-i-1)!}\frac{1}{N} \\ &= 2^{-N}\frac{N!}{(i+1)!(N-(i+1))!}\frac{i+1}{N} = 2^{-N}\binom{N}{i+1}\frac{i+1}{N} = \pi_{i+1}p_{i+1,i}.\end{aligned}$$

Also ist die Ehrenfest-Kette reversibel bezüglich π.

Beispiel 2.57 (Irrfahrt auf einem Graphen)**.** Ein Graph ist eine Menge $G = (V, K)$, wobei V eine abzählbare Menge von Ecken und K die Menge von Kanten (Teilmenge aller zweielementigen Teilmengen von V) sind. Die Menge K läßt sich beschreiben durch eine Nachbarschaftsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j\in V}$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ wenn } (v_i, v_j) \in K, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten hier ungerichtete Graphen ohne Schleifen, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ und $a_{ii} = 0$.

Wir nehmen an, dass

$$\mu_i = \sum_{j\in V} a_{ij} < \infty$$

und setzen

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\mu_i}.$$

Dann ist $P = (p_{ij})_{i,j\in V}$ Übergangsmatrix einer *Irrfahrt auf dem Graphen G*. Ist die zugehörige Markovkette in i, so wird der Zustand im nächsten Zeitpunkt unter allen uniform ausgewählt, die mit i auf dem Graphen benachbart sind. Mit anderen Worten wird uniform aus der Menge der i enthaltenden Kanten eine gezogen. Der Zustand am anderen Ende dieser Kante ist dann der neue Zustand.

Nach Definition ist klar, dass

$$\mu_i p_{ij} = a_{ij} = a_{ji} = \mu_j p_{ji}.$$

Also ist μ ein reversibles Maß für P.

Wir können die obigen Bedingungen auch durch

$$a_{ij} = a_{ji} \geq 0, \qquad \mu_i = \sum_j a_{ij} < \infty \qquad \text{und} \qquad p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\mu_i}$$

ersetzen und zur selben Schlußfolgerung gelangen. Bei der zugehörigen Markovkette wird eine Kante entsprechend ihrem relativen Gewicht im Vergleich zum Gesamtgewicht aller von i ausgehenden Kanten ausgewählt.

Das ist ein allgemeines Beispiel für eine reversible Markovkette. Ist nämlich μ ein reversibles Maß für P, dann können wir $a_{ij} = \mu_i p_{ij}$ setzen.

2.7 Konvergenzrate irreduzibler Markovketten auf endlichen Zustandsräumen

Es sei P die Übergangsmatrix einer aperiodischen, irreduziblen und positiv rekurrenten Markovkette auf einem Zustandsraum I. Dann wissen wir, dass $(p_{i,j}^{(n)})_{j\in I}$ für alle $i \in I$ gegen die eindeutige invarianten Verteilung $(\pi_j)_{j\in I}$ konvergiert. In diesem Abschnitt, wollen wir die Rate dieser Konvergenz untersuchen. Als Hilfsmittel, benutzen wir einige Begriffe der linearen Algebra, insbesondere Eigenwerte und Eigenvektoren. Wir zeigen, dass im Falle $|I| < \infty$, die Konvergenzrate exponentiell ist. Einige Begriffe, die wir hier verwenden werden sind uns teilweise schon im letzten Abschnitt begegnet.

Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf I mit $\pi_i > 0, i \in I$ definieren das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_\pi = \sum_{i\in I} f_i g_i \pi_i,$$

für $f, g \in L^2(\pi) = \{h : I \to \mathbb{R} : \|h\|_\pi^2 < \infty\}$, wobei $\|h\|_\pi^2 = \sum_{i\in I}(h_i)^2\pi_i$.

Definition 2.58. Die Matrix $\widehat{P}$ mit

$$\widehat{p}_{i,j} := \frac{p_{j,i}\pi_j}{\pi_i}, \qquad i, j \in I$$

heißt (π-) *adjungierte* Matrix von P. Falls $P = \widehat{P}$, so heißt P *symmetrisch* bezüglich π. In diesem Fall erfüllt P die *detailed balance* Bedingung

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}, \qquad i, j \in I.$$

Die stochastischen Matrizen P und $\widehat{P}$ heißen *normal*, falls

$$P\widehat{P} = \widehat{P}P.$$

Es gilt die folgende Beziehung:

$$\langle Pf, g\rangle_\pi = \langle f, \widehat{P}g\rangle_\pi, \quad f, g \in L^2(\pi),$$

wobei $Pf_i = \sum_j p_{i,j} f_j$. Insbesondere ist $\widehat{P}$ auch eine stochastische Matrix und π ist eine invariante Verteilung zu $\widehat{P}$. Letzteres haben wir bereits im letzten Abschnitt gesehen.

Beispiel 2.59. Sei $I = \{0, 1, \dots, N-1\}$ der diskrete Torus der Länge N. Addition und Subtraktion werden immer modulo N verstanden. Sei $p_{i,j} = q(i-j)$, wobei die Gewichte $q(i) \geq 0$ normiert sind: $\sum_{i\in I} q(i) = 1$. Dann ist $\pi_i = \frac{1}{N}$ die invariante Verteilung, ferner ist $\widehat{p}_{i,j} = p_{j,i}$, und $\widehat{P}P = P\widehat{P}$, d.h. die Matrizen sind normal (Übung!). Wie wir aber in Beispiel 2.55 gesehen haben, ist die zugehörige Markovkette nicht notwendigerweise reversibel bezüglich π, d.h. die detailed balance Bedingung ist nicht notwendigerweise erfüllt.

Beispiel 2.60. Sei $I = \mathbb{Z}$ und sei die stochastische Matrix P mit $p_{i,j} = p_{-j,-i} > 0, |i-j| \leq 1$ und $p_{i,j} = 0, |i-j| > 1$ gegeben. Die zugehörige Markovkette ist also irreduzibel und springt immer zu den nächsten Nachbarn oder bleibt auf der Stelle. Wir wissen bereits: Ist die Markovkette positiv rekurrent, dann ist die (eindeutige) invariante Verteilung positiv. Ferner kann man zeigen, dass sie auch symmetrisch sein muss (Übung!).

Die Rolle von $\widehat{P}$ lässt sich am besten mit der Transformation der Dichte wie im nachfolgenden Lemma erklären. Sei ν eine beliebige Anfangsverteilung. Dann ist $\nu^{(n)} := \nu P^n$ die Verteilung der Markovkette zur Zeit n.

Lemma 2.61. *Es sei $f_i^{(n)} := \frac{\nu_i^{(n)}}{\pi_i}$, $i \in I$ die Dichte von $\nu^{(n)}$ bezüglich π, dann gilt*

$$f^{(n)} = \widehat{P}^n f^{(0)}.$$

Beweis. Nach Definition von $\nu^{(n)}$, einigen elementaren Umformungen und Definition von $\widehat{P}$ gilt

$$\begin{aligned} f_i^{(n+1)} &= \frac{\nu_i^{(n+1)}}{\pi_i} = \frac{(\nu^{(n)}P)_i}{\pi_i} = \frac{\sum_j \nu_j^{(n)} p_{j,i}}{\pi_i} \\ &= \frac{\sum_j f_j^{(n)} \pi_j p_{j,i}}{\pi_i} = \sum_j \widehat{p}_{i,j} f_j^{(n)} = (\widehat{P} f^{(n)})_i. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun induktiv. □

Für $|I| = N < \infty$ und symmetrische stochastische Matrix P sind die Eigenwerte $\lambda_i, i = 0, \dots, N-1$ von P reell und man kann eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren finden. Weil P stochastisch ist, ist $\lambda_0 = 1$ ein Eigenwert zum Eigenvektor $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Nach dem folgenden Lemma ist dieser Eigenwert betragsmäßig der größte.

Lemma 2.62. *Es seien P eine symmetrische stochastische Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von P, dann gilt $|\lambda| \le 1$.*

Beweis. Sei $f \in L^2(\pi)$ ein Eigenvektor von P zu λ. Sei j_0 so, dass $|f_{j_0}| = \max_{j \in I} |f_j| > 0$. Dann gilt

$$|\lambda||f_{j_0}| = |\sum_i p_{j_0,i} f_i| \le \sum_i p_{j_0,i} \max_i |f_i| = |f_{j_0}|.$$

□

Wir ordnen die Eigenwerte von P der Größe nach an:

$$-1 \le \lambda_{N-1} \le \lambda_{N-2} \le \dots \le \lambda_1 \le \lambda_0 = 1.$$

Lemma 2.63. *Ist $|I| = N < \infty$ und ist P irreduzibel und symmetrisch, dann ist $\lambda_1 < 1$. Ist ferner die Matrix P aperiodisch, so ist $\lambda_{N-1} > -1$.*

Beweis. Wegen der Irreduzibilität, gibt es zu jedem Paar i, j ein *minimales* $n(i,j) > 0$ mit $p_{ij}^{(n(i,j))} > 0$. Wir setzen $\bar{n} = \max_{i,j} n(i,j) < \infty$ und

$$R = \frac{1}{\bar{n}+1} \sum_{k=0}^{\bar{n}} P^{(k)}.$$

Dann ist $R = (r_{ij})_{i,j \in I}$ eine stochastische Matrix, symmetrisch bezüglich π und es gilt $r_{ij} > 0$, für alle $i, j \in I$. Denn die aufsummierten Matrizen sind jeweils symmetrisch und für jedes Paar i, j ist mindestens eine der Matrizen an der Stelle i, j positiv. Nun zeigen wir, dass 1 ein einfacher Eigenwert von P ist. Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Dann finden wir einen Eigenvektor f zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit $\langle f, \mathbf{1}\rangle_\pi = 0$. Für diesen Eigenvektor gilt auch $Rf = f$. Sei j_0 wie im Beweis vom vorherigen Lemma gegeben durch $|f_{j_0}| = \max_i |f_i|$. Wir können annehmen, dass $f_{j_0} = 1$ (ausschließlich negative Werte kann dieser Eigenvektor nicht haben, da die Matrix nur positive Einträge hat). Wegen $\langle f, \mathbf{1}\rangle_\pi = 0$ und $\pi_i > 0, i \in I$, muss es wenigstens ein $j_1 \neq j_0$ mit $f_{j_1} < 0$ geben. Es folgt

$$1 = f_{j_0} = (Rf)_{j_0} = r_{j_0,j_1} f_{j_1} + \sum_{k \neq j_1} r_{j_0,k} f_k \leq r_{j_0,j_1} f_{j_1} + \sum_{k \neq j_1} r_{j_0,k} < 1,$$

was ein Widerspruch ergibt!

Im Falle einer irreduziblen und aperiodischen Matrix P, gibt es für $i, j \in I$ ein minimales $n(i,j) > 0$ mit $p_{i,j}^{(m)} > 0, m \geq n(i,j)$. Mit $n^* = 2(\max_{i,j} n(i,j)) < \infty$ gilt $p_{i,j}^{(n^*)} > 0, i, j \in I$. Wäre $\lambda_{N-1} = -1$, dann könnten wir ein Eigenvektor f mit $\langle f, \mathbf{1}\rangle_\pi = 0$ und $Pf = -f$ finden. Dann ist $P^{n^*} f = (-1)^{n^*} f = f$ (da n^* gerade ist). Nun können wir wie oben argumentieren, um zu einen Widerspruch zu gelangen. □

Nun kehren wir zu der allgemeinen Situation zurück und setzen für $r \in \mathbb{N}$

$$Q^{(r)} = P^r \widehat{P}^r = P^r \widehat{P^r}.$$

Dann ist $Q^{(r)}$ eine symmetrische stochastische Matrix. Außerdem ist $Q^{(r)}$ positiv semidefinit, denn

$$\langle Q^{(r)} f, f\rangle_\pi = \langle \widehat{P}^r f, \widehat{P}^r f\rangle_\pi \geq 0.$$

Beachten Sie, dass im Allgemeinen, $Q^{(r)} \neq (Q^{(1)})^{(r)}$, außer natürlich, wenn P normal ist. Sei

$$\tau^{(r)} := \sup\{\langle Q^{(r)} f, f\rangle_\pi : f \in L^2(\pi), \langle f, \mathbf{1}\rangle_\pi = 0, \|f\|_\pi = 1\}.$$

Falls P normal ist, so gilt

$$\tau^{(r)} = (\tau^{(1)})^r.$$

Im symmetrischen Fall lässt sich $\tau^{(1)}$ einfach ausdrücken wie wir im folgenden Lemma sehen werden.

Lemma 2.64. *Ist $|I| = N < \infty$ und ist P symmetrisch, dann ist*

$$\sqrt{\tau^{(1)}} = \max(|\lambda_1|, |\lambda_{N-1}|).$$

Insbesondere ist $\tau^{(1)} < 1$, falls P irreduzibel und aperiodisch ist.

Beweis. Für symmetrische Matrix P ist $Q^{(1)} = P^2$ und die Eigenwerte von $Q^{(1)}$ sind $\{\lambda_i^2, i = 0, \ldots, N-1\}$. Dabei ist $\lambda_0^2 = 1$ der größte Eigenwert von $Q^{(1)}$ und $\tau^{(1)} = \max(\lambda_1^2, \lambda_{N-1}^2)$ der zweitgrößte. □

Im nicht-symmetrischen Fall folgt im Allgemeinen aus der Aperiodizität und Irreduzibilität von P *nicht* die Irreduzibilität von $Q^{(1)}$. Es kann also passieren, dass $\tau^{(1)} = 1$ ist. Jedoch, kann man immer $r \geq 1$ so wählen, dass $\tau^{(r)} < 1$ gilt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.65. *Ist $|I| = N < \infty$ und ist P aperiodisch und irreduzibel, dann gibt es $r \geq 1$, sodass $\tau^{(r)} < 1$. Ist P normal, dann kann man $r = 1$ wählen.*

Beweis. Da P irreduzibel und aperiodisch ist, gibt es ein $r \geq 1$ mit $p_{i,j}^{(r)} > 0$ für alle $i, j \in I$. Dann ist auch $\widehat{p^{(r)}}_{i,j} > 0$ für alle $i, j \in I$. Es folgt, dass alle Einträge von $Q^{(r)}$ positiv sind. Insbesondere ist $Q^{(r)}$ irreduzibel und die 1. Aussage folgt mit Lemma 2.64. Im normalen Fall ist $\tau^{(r)} = (\tau^{(1)})^r$, sodass aus $\tau^{(r)} < 1$ auch $\tau^{(1)} < 1$ folgt. $\square$

Die Aussage des obigen Lemma ist im Allgemeinen *falsch* für unendliches I ist. Die Bedeutung von τ wird im folgenden Satz erklärt. Zuvor brauchen wir noch eine Definition.

Definition 2.66. Für Verteilungen ν, μ auf I ist durch

$$\|\mu - \nu\|_{\text{var}} = \sup_{A \subset I} \big|\mu(A) - \nu(A)\big|$$

der *Variationsabstand* zwischen μ und ν definiert.

Satz 2.67. *Es sei P irreduzibel, aperiodisch und positiv rekurrent mit invarianter Verteilung π. Dann gilt für jedes $k \geq 1$*

$$\|p_{i,\cdot}^{(n)} - \pi\|_{\text{var}} \leq \frac{(\tau^{(k)})^{\left[\frac{n}{k}\right]}}{4} \frac{1 - \pi_i}{\pi_i}, \qquad i \in I, n \geq k.$$

Beweis. Mit der Hahn-Jordan Zerlegung kann man zeigen, dass für eine beliebige Verteilung ν auf I

$$\|\nu - \pi\|_{\text{var}} = \frac{1}{2} \sup_{f : \|f\|_\infty \leq 1} \big|\sum_i f_i \nu_i - \sum_i f_i \pi_i\big|.$$

Ferner erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\big|\sum_i f_i \nu_i - \sum_i f_i \pi_i\big| = \big|\sum_i f_i \big(\frac{\nu_i}{\pi_i} - 1\big)\pi_i\big| = \big|\langle f, \frac{\nu}{\pi} - 1\rangle_\pi\big| \leq \|f\|_\pi \|\frac{\nu}{\pi} - 1\|_\pi,$$

(hier ist ν/π komponentenweise zu verstehen) und somit

$$\|\nu - \pi\|_{\text{var}} \leq \frac{1}{2} \|\frac{\nu}{\pi} - 1\|_\pi.$$

Natürlich ist $p_{i,\cdot}^{(n)}$ die Verteilung der Markovkette zur Zeit n mit Anfangsverteilung $\nu = \delta_i$. Sei $f_j^{(0)} = \frac{\delta_i(j)}{\pi_j}$ die Dichte zur Zeit 0, dann gilt für die Dichte zur Zeit n mit Lemma 2.61

$$f_j^{(n)} = \frac{p_{i,j}^n}{\pi_j} = \widehat{P}^n f_j^{(0)} = \widehat{P}^k f_j^{(n-k)}, \quad j \in I,$$

und wir bekommen zunächst die Abschätzung

$$\|p_{i,\cdot}^{(n)} - \pi\|_{\text{var}}^2 \leq \frac{1}{4} \|\widehat{P}^k f^{(n-k)} - \mathbf{1}\|_\pi^2.$$

Da $\widehat{P}^k \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ist, folgt

$$\big\|\widehat{P}^k f^{(n-k)} - \mathbf{1}\big\|_\pi^2 = \big\|\widehat{P}^k \big(f^{(n-k)} - \mathbf{1}\big)\big\|_\pi^2 = \big\|\widehat{P}^k h\big\|_\pi^2,$$

wobei $h_i = f_i^{(n-k)} - 1, i \in I$. Es gilt

$$\langle h, \mathbf{1}\rangle_\pi = \langle f^{(n-k)}, \mathbf{1}\rangle_\pi - \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\pi = 1 - 1 = 0,$$

da $f^{(n-k)}$ eine Dichte ist. Mit Hilfe der Definition von $\tau^{(k)}$ erhalten wir

$$\big\|\widehat{P}^{(k)} h\big\|_\pi^2 = \langle \widehat{P}^{(k)} h, \widehat{P}^{(k)} h\rangle_\pi = \langle Q^{(k)} h, h\rangle_\pi \le \tau^{(k)} \langle h, h\rangle_\pi.$$

Sei nun $n = k\big[\frac{n}{k}\big] + \ell$ mit $0 \le \ell \le k-1$. Durch Iteration erhalten wir

$$\|p_{i,\cdot}^{(n)} - \pi\|_{\text{var}}^2 \le \frac{\big(\tau^{(k)}\big)^{\left[\frac{n}{k}\right]}}{4} \big\|\widehat{P}^{(\ell)}\big(f^{(0)} - \mathbf{1}\big)\big\|_\pi^2 \le \frac{\big(\tau^{(k)}\big)^{\left[\frac{n}{k}\right]}}{4} \tau^{(\ell)} \big\|f^{(0)} - \mathbf{1}\big\|_\pi^2.$$

Nun ist $\tau^{(\ell)} \le 1$ und

$$\begin{aligned}
\big\|f^{(0)} - \mathbf{1}\big\|_\pi^2 &= \langle f^{(0)} - \mathbf{1}, f^{(0)} - \mathbf{1}\rangle_\pi \\
&= \langle f^{(0)}, f^{(0)}\rangle_\pi - 2\langle f^{(0)}, \mathbf{1}\rangle_\pi + \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle_\pi = \langle f^{(0)}, f^{(0)}\rangle_\pi - 1 \\
&= \frac{1}{\pi_i} - 1 = \frac{1 - \pi_i}{\pi_i},
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

2.8 Ergodensatz

In diesem Abschnitt betrachten wir das asymptotische Verhalten der Mittelwerte von Funktionen von Markovketten und beweisen dafür das starke Gesetz der großen Zahlen, was auch als Ergodensatz bezeichnet wird.

Zunächst erinnern wir an die klassische Version davon.

Satz 2.68 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** *Es sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten nicht-negativen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_1] = \mu$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \mu\right) = 1.$$

Beweis. Falls $\mu < \infty$, dann ist es das "gewöhnliche" starke Gesetz der großen Zahlen (siehe z.B. Klenke 2008, Satz 5.17).

Sei nun $\mu = \infty$. Für $N < \infty$ setzen wir

$$Y_n^{(N)} = Y_n \wedge N = \min\{Y_n, N\}.$$

Dann gilt fast sicher

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \ge \frac{Y_1^{(N)} + \cdots + Y_n^{(N)}}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}[Y_1 \wedge N].$$

Nach dem Satz von monotoner Konvergenz (siehe z.B. Klenke 2008, Satz 4.20) gilt

$$\mathbb{E}[Y_1 \wedge N] \uparrow \mu \quad \text{für} \quad N \uparrow \infty.$$

Somit folgt

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \text{ fast sicher.}$$

□

Im Folgenden bezeichnen wir mit $V_i(n)$ die *Anzahl der Besuche in i bis zur Zeit n* (auch *Lokalzeit in i* genannt):

$$V_i(n) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i\}}.$$

Wir definieren rekursiv

$$T_i^{(0)} = 0, \quad \text{und} \quad T_i^{(r+1)} := \inf\{n \geq T_i^{(r)} + 1 : X_n = i\}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$S_i^{(r)} = \begin{cases} T_i^{(r)} - T_i^{(r-1)} & : \text{ wenn } T_i^{(r-1)} < \infty, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lemma 2.69. *Für $r = 2, 3, \ldots$ gilt: bedingt auf $\{T_i^{(r-1)} < \infty\}$ ist $S_i^{(r)}$ unabhängig von $\{X_m : m \leq T_i^{(r-1)}\}$ und*

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i = n). \tag{2.37}$$

Beweis. Sei $T = T_i^{(r-1)}$. Dann ist $X_T = i$ auf $\{T < \infty\}$. Nach starker Markoveigenschaft bedingt auf $\{T < \infty\}$ ist $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ Markov-(δ_i, P) und unabhängig von $X_0, \ldots, X_T$.

Es gilt

$$S_i^{(r)} = \inf\{n \geq 1 : X_{T+n} = i\},$$

d.h. $S_i^{(r)}$ ist die erste Rückkehrzeit von $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ in den Zustand i, was (2.37) zeigt. □

Satz 2.70 (Ergodensatz)**.** *Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung λ. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_i(n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{m_i}\right) = 1, \tag{2.38}$$

wobei $m_i = \mathbb{E}_i[T_i]$ die erwartete Rückkehrzeit in i ist.

Im positiv rekurrenten Fall gilt für jede beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow{n\to\infty} \langle f, \pi\rangle\right) = 1, \tag{2.39}$$

wobei π die eindeutige invariante Verteilung der Markovkette ist und

$$\langle f, \pi \rangle := \sum_{i \in I} f(i) \pi_i$$

das Integral von f bezüglich π ist.

Beweis. Im transienten Fall ist der Beweis von (2.38) einfach. Dann ist nämlich $m_i = \infty$ und $V_i = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = i\}}$, die Gesamtzahl der Besuche in i, ist fast sicher endlich. Dann folgt

$$\frac{V_i(n)}{n} \leq \frac{V_i}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 = \frac{1}{m_i} \text{ f.s.}$$

Nun betrachten wir den rekurrenten Fall und zeigen (2.38) für ein festes i. Für $T = T_i$ gilt $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ und $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ ist Markov-(δ_i, P) unabhängig von $X_0, \ldots, X_T$. Die relative Anzahl $V_i(n)/n$ der Besuche in i ist dieselbe für $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ und für $(X_n)_{n \geq 0}$. Es reicht also den Fall $\lambda = \delta_i$ zu betrachten.

Nach Lemma 2.69 sind die nicht-negativen Zufallsvariablen $S_i^{(1)}, S_i^{(2)}, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt, und es gilt $\mathbb{E}[S_i^{(1)}] = m_i$.

Nun gilt

$$S_i^{(1)} + \cdots + S_i^{(V_i(n)-1)} \leq n - 1,$$

hier ist die linke Seite der Zeitpunkt des letzten Besuches in i bis zur Zeit n. Außerdem gilt

$$S_i^{(1)} + \cdots + S_i^{(V_i(n))} \geq n,$$

hier ist die linke Seite der Zeitpunkt des ersten Besuches von i nach $n-1$. Es folgt

$$\frac{S_i^{(1)} + \cdots + S_i^{(V_i(n)-1)}}{V_i(n)} \leq \frac{n}{V_i(n)} \leq \frac{S_i^{(1)} + \cdots + S_i^{(V_i(n))}}{V_i(n)}. \tag{2.40}$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_i^{(1)} + \cdots + S_i^{(n)}}{n} \xrightarrow{n \to \infty} m_i \right) = 1,$$

und wegen Rekurrenz auch

$$\mathbb{P}(V_i(n) \xrightarrow{n \to \infty} \infty) = 1.$$

Damit konvergieren die linke und die rechte Seite in (2.40) fast sicher gegen m_i. Also gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{V_i(n)} \xrightarrow{n \to \infty} m_i \right) = 1$$

und es folgt

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_i(n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{m_i}\right) = 1.$$

Sei nun $(X_n)_{n\geq 0}$ positive rekurrent mit (eindeutiger) invarianter Verteilung π und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $|f| \leq 1$ ist. Ansonsten betrachten wir $f/\max_{i\in I}|f(i)|$.

Für jede Teilmenge $J \subset I$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \langle f,\pi\rangle\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i\in I} V_i(n) f(i) - \langle f,\pi\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{i\in I}\left(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right) f(i)\right| \\
&\leq \sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + \sum_{i\notin J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| \\
&\leq \sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + \sum_{i\notin J}\left(\frac{V_i(n)}{n} + \pi_i\right) \\
&\leq \sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + \sum_{i\notin J}\left(\frac{V_i(n)}{n} + \pi_i\right) + \sum_{i\in I}\left(\pi_i - \frac{V_i(n)}{n}\right) \\
&\leq 2\sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + 2\sum_{i\notin J}\pi_i.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.46 gilt $\pi_i = \frac{1}{m_i}$ und mit dem oben gezeigten folgt

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_i(n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi_i \text{ für alle } i \in I\right) = 1.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen endliches J (falls I endlich ist kann man, und wird man im Allgemeinen auch müssen, $J = I$ wählen), so dass

$$\sum_{i\notin J}\pi_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dann wählen wir $N(\omega)$ so, dass für $n \geq N(\omega)$

$$\sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Damit ist für $n \geq N(\omega)$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \langle f,\pi\rangle\right| < \varepsilon.$$

Die Menge der ω's, für die es solches $N(\omega)$ nicht gibt, ist in einer Nullmenge enthalten und somit gilt (2.39). □

Beispiel 2.71 (Schätzung einer Übergangsmatrix)**.** Angenommen wir beobachten eine Markovkette $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ mit einer unbekannten Übergangsmatrix P und Startverteiliung λ.

Für i,j sei N_{ij} die Anzahl der Übergänge von i nach j, d.h.

$$N_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}.$$

Wir wollen nun einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{P}$ für die Übergangsmatrix P finden, d.h. gegeben die Beobachtung $X_0,\dots,X_N$ ist $\widehat{P}$ so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit für diese Beobachtung, also

$$\lambda(X_0)p_{X_0X_1}\dots p_{X_{N-1}X_N}$$

maximiert wird. Äquivalent, aber oft deutlich einfacher, lässt sich der Logarithmus dieser Wahrscheinlichkeit betrachten.

Die log-*Likelihood Funktion* ist gegeben durch

$$\ell(P) = \log(\lambda(X_0)p_{X_0X_1}\dots p_{X_{N-1}X_N}) = \log\lambda(X_0) + \sum_{i,j\in I} N_{ij}\log p_{ij}.$$

Es muss also $\sum_{i,j\in I} N_{ij}\log p_{ij}$ maximiert werden unter der Nebenbedingung $\sum_{j\in I} p_{ij} = 1$ für alle i. Wir maximieren erst

$$\ell(P) + \sum_{i,j}\mu_i p_{ij}.$$

Man findet leicht, dass diese Funktion in $\widehat{p}_{ij} = -\frac{N_{ij}}{\mu_i}$ maximiert wird. Jetzt sind noch die Lagrange-Multiplikatoren $(\mu_i)_{i\in I}$ so zu wählen, dass die Nebenbedingung erfüllt ist. Aus

$$1 = \sum_{j\in I}\widehat{p}_{ij} = -\sum_{j\in I}\frac{N_{ij}}{\mu_i}$$

folgt

$$\mu_i = -\sum_{j\in I} N_{ij}.$$

Setzen wir $N_i = \sum_{j\in I} N_{ij}$, dann ist

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i},$$

was gerade der Anteil der Sprünge von i nach j relativ zur Gesamtanzahl der Sprünge aus i ist.

Jetzt kann man sich noch fragen ob dieser Schätzer *konsistent* ist, ob also $\widehat{p}_{ij}$ gegen p_{ij} in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Wir werden sogar zeigen, dass der Schätzer stark konsistent ist, d.h. wir haben sogar fast sichere Konvergenz.

Wir nehmen an, dass die Markovkette so lange lief, dass sie N mal den Zustand i verlassen hat. Dazu können wir (im transienten Fall wird man das im Allgemeinen müssen) z.B. N mal im Zustand i neu starten.

Wie zuvor ist $\widehat{p}_{ij} = N_{ij}/N$. Mit

$$Y_n = \mathbb{1}_{\{n\text{-ter Sprung aus } i \text{ ist ein Sprung nach } j\}}$$

ist

$$N_{ij} = Y_1 + \cdots + Y_N.$$

Nach starker Markoveigenschaft sind $Y_1, \ldots, Y_N$ uiv mit $\mathbb{E}[Y_1] = p_{ij}$. Damit gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\mathbb{P}(\widehat{p}_{ij} \to p_{ij} \text{ für } N \to \infty\ ) = 1,$$

was die *starke Konsistenz* von $\widehat{p}_{ij}$ zeigt.

2.9 Markovketten mit absorbierenden Zuständen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns genauer mit Markovketten mit absorbierenden Zuständen. Nach Definition 2.15 ist ein Zustand $i \in I$ absorbierend, wenn $\{i\}$ eine abgeschlossene Klasse ist. Naheliegende Fragen bei Markovketten mit absorbierenden Zuständen sind:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Markovkette absorbiert?
- Wie lange dauert es im Mittel bis die Markovkette absorbiert wird?

Die wichtigste Methode mit der man die Größen berechnen kann ist die Zerlegung nach dem ersten Schritt (*engl.: first-step analysis*). Wir starten mit einem klassischen Beispiel.

Beispiel 2.72 (Ruinwahrscheinlichkeit)**.** Zwei Spieler A und B werfen eine (möglicherweise unfaire) Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ „Kopf“ zeigt und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ „Zahl“. Vor jedem Münzwurf setzen die Spieler je ein Euro. Bei „Kopf“ gewinnt A 1 Euro und bei „Zahl“ gewinnt B 1 Euro. Wir nehmen an, dass die Spieler A und B mit Anfangskapital a bzw. b starten.

Wir setzen $I = \{0, 1, \ldots, a, a+1, \ldots, a+b = N\}$ und bezeichnen mit X_n das Guthaben des Spielers A zum Zeitpunkt n. Dann ist $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine Markovkette mit $X_0 = a$ und $X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}$, wobei $Z_1, Z_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen sind mit

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Z_i = -1) = q.$$

Das Spiel ist beendet sobald einer der Spieler sein komplettes Guthaben verspielt hat, d.h. zur Zeit $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ oder } X_n = N\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel letztendlich gewinnt ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(X_T = N | X_0 = a).$$

Wir setzen allgemeiner

$$h_i = \mathbb{P}(X_T = N | X_0 = i).$$

Mit Zerlegung nach dem ersten Schritt und Markoveigenschaft erhalten wir für $i \in \{1, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} h_i &= \mathbb{P}(X_T = N, X_1 = i+1 | X_0 = i) + \mathbb{P}(X_T = N, X_1 = i-1 | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_T = N | X_1 = i+1)\mathbb{P}(X_1 = i+1 | X_0 = i) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_T = N | X_1 = i-1)\mathbb{P}(X_1 = i-1 | X_0 = i) \\ &= ph_{i+1} + qh_{i-1}. \end{aligned}$$

Für $i \in \{0, N\}$ gelten die Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(a+b) = 1$. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$ph_{i+1} - ph_i - qh_i + qh_{i-1} = p(h_{i+1} - h_i) - q(h_i - h_{i-1}) = 0.$$

Wir erhalten

$$h_{i+1} - h_i = \frac{q}{p}(h_i - h_{i-1}).$$

Insbesondere gilt $h_2 - h_1 = \frac{q}{p}h_1$, $h_3 - h_2 = \frac{q}{p}(h_2 - h_1) = (\frac{q}{p})^2 h_1$ und allgemeiner

$$h_{i+1} - h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i h_1, \quad i = 1, \dots, a+b-1.$$

Mit Teleskopsummenargument folgt

$$h_{i+1} - h_1 = \sum_{k=1}^{i}(h_{k+1} - h_k) = \sum_{k=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k h_1$$

und

$$h_{i+1} = h_1 + h_1 \sum_{k=1}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k = h_1 \sum_{k=0}^{i}\left(\frac{q}{p}\right)^k = \begin{cases} h_1 \frac{1-(q/p)^{i+1}}{1-q/p} & : p \neq q, \\ h_1(i+1) & : p = q = 1/2. \end{cases} \tag{2.41}$$

Bisher haben wir die Randbedingung $h_N = 1$ noch nicht genutzt. Mit dieser Bedingung (also $i = N-1$ in obiger Formel) erhalten wir

$$1 = h_N = \begin{cases} h_1 \frac{1-(q/p)^N}{1-q/p} & : p \neq q, \\ h_1 N & : p = q = 1/2. \end{cases}$$

Auflösen nach h_1 liefert

$$h_1 = \begin{cases} \frac{1-q/p}{1-(q/p)^N} & : p \neq q, \\ 1/N & : p = q = 1/2. \end{cases}$$

Schließlich erhalten wir nach Einsetzen von h_1 in (2.41) (und Ersetzen von $i+1$ durch i in der Formel)

$$h_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & : p \neq q, \\ i/N & : p = q = 1/2. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Zerlegung nach dem ersten Schritt ist bei Markovketten mit absorbierenden Zuständen oft für interessierende Größen wie in obigen Beispiel Rekursionsgleichungen aufstellen. Deren Lösung kann natürlich mitunter schwer sein.

Sei allgemeiner $A \subset I$ sei

$$H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit bei Start in $i \in I$ jemals die Menge A zu treffen ist gegeben durch

$$h_i^A := \mathbb{P}_i(H_A < \infty).$$

Wenn A eine abgeschlossene Klasse ist, dann ist h_i^A die Absorptionswahrscheinlichkeit in A bei Start in i. Die mittlere Zeit bis zur Absorption ist gegeben durch

$$k_i^A := \mathbb{E}_i[H_A] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(H_A = n) + \infty \cdot \mathbb{P}_i(H_A = \infty).$$

In den folgenden zwei Sätzen zeigen wir, dass $h^A = (h_i^A : i \in I)$ und $k^A = (k_i^A : i \in I)$ ähnlich wie im Beispiel mit den Ruinwahrscheinlichkeiten bestimmte lineare Gleichungen lösen.

Satz 2.73. *Der Vektor $h^A = (h_i^A : i \in I)$ ist die minimale nicht negative Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & : i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A & : i \notin A. \end{cases} \tag{2.42}$$

Dabei ist eine Lösung minimal, wenn für jede weitere Lösung $x = (x_i : i \in I)$ des Gleichungssystems gilt $h_i \leq x_i$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 2.74. Beachten Sie, dass $x = (x_i : i \in I)$ mit $x_i = 1$ für alle $i \in I$ stets eine Lösung von (2.42) ist. Überlegen Sie sich warum diese Lösung die einzige Lösung ist, wenn die Markovkette (X_n) irreduzibel und positiv rekurrent ist.

Beweis von Satz 2.73. Zunächst zeigen wir, dass h^A die Gleichung (2.42) löst. Wenn $X_0 = i \in A$ ist, dann ist $H_A = 0$ und damit $h_i^A = 1$. Ist $X_0 = i \notin A$, so ist $H_A \geq 1$ und mit der Markoveigenschaft gilt

$$\mathbb{P}_i(H_A < \infty | X_1 = j) = \mathbb{P}_j(H_A < \infty) = h_j^A$$

und damit

$$\begin{aligned} h_i^A &= \mathbb{P}_i(H_A < \infty) \\ &= \sum_{j \in I} \mathbb{P}_i(H_A < \infty, X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} \mathbb{P}_i(H_A < \infty | X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} h_j^A p_{ij}, \end{aligned}$$

was (2.42) zeigt.

Angenommen $x = (x_i : i \in I)$ ist eine weitere Lösung von (2.42) (beachten Sie, dass z.B. $x \equiv 1$ stets eine Lösung von (2.42) ist). Dann ist $h_i^A = x_i = 1$ für alle $i \in A$. Für $i \notin A$ gilt

$$x_i = \sum_{j \in I} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j.$$

Setzen wir das für x_j in der Summe auf der rechten Seite ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} \Big(\sum_{k \in A} p_{jk} + \sum_{k \notin A} p_{jk} x_k \Big) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} x_k. \end{aligned}$$

Wiederholen wir das Ersetzen von x in der letzten Summe mehrfach, dann folgt nach n Schritten

$$\begin{aligned} x_i &= \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \cdots + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A) \\ &\quad + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \\ &= \mathbb{P}_i(H_A \leq n) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n}. \end{aligned}$$

Wenn x nicht negativ ist, dann ist die Summe auf der rechten Seite nicht negativ und es folgt $x_i \geq \mathbb{P}_i(H_A \leq n)$ für alle n und somit

$$x_i \geq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(H_A \leq n) = \mathbb{P}_i(H_A < \infty) = h_i^A.$$

□

Beispiel 2.75 (Geburts- und Todeskette)**.** Sei (X_n) eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{00} = 1, \quad \text{und} \quad p_{i,i+1} = p_i,\ p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i,\ i = 1, 2, \ldots,$$

wobei $0 < p_i < 1 - q_i < 1$ gilt. Der Zustand 0 ist also absorbierend und wir wollen die Absorprionswahrscheinlichkeit $h_i = h_i^{\{0\}}$ berechnen. Nach Satz 2.73 löst $h = (h_i : i \in \mathbb{N}_0)$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_i &= p_i h_{i+1} + q_i h_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Wir setzen $u_i = h_{i-1} - h_i$, dann ist $p_i u_{i+1} = q_i u_i$ für $i = 1, 2, \ldots$ und damit

$$u_{i+1} = \frac{q_i}{p_i} u_i = \frac{q_i}{p_i} \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}} u_{i-1} = \cdots = \frac{q_i q_{i-1} \cdots q_1}{p_i p_{i-1} \cdots p_1} u_1 =: \gamma_i u_1. \tag{2.43}$$

Mit Teleskopsummenargument sieht man

$$u_1 + \cdots + u_i = h_0 - h_i,$$

bzw. nach Einsetzen von (2.43) und leichten Umformungen

$$h_i = 1 - K(\gamma_0 + \cdots + \gamma_{i-1}),$$

wobei $K = u_1$ und $\gamma_0 = 1$ ist. Die Konstante K muss hier geeignet gewählt werden. Wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$ ist, dann müssen wir $K = 0$ wählen. Ansonsten würden wir einen Widerspruch zu $h_i \in [0, 1]$ für alle i erhalten.

Wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty$ ist, dann kann $K > 0$ zunächst beliebig gewählt werden solange die Bedingung $h_i \in [0, 1]$ erfüllt bleibt. Minimal ist die nicht negative Lösung bei der Wahl $K = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i\right)^{-1}$ und dann ist

$$h_i = 1 - \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j} = \frac{\sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}.$$

In diesem Fall ist $h_i < 1$ für $i = 1, 2, \ldots$. Mit anderen Worten überlebt „die Population", die man mit einer solcher Markovkette modellieren kann mit positiver Wahrscheinlichkeit bei Start außerhalb des absorbierenden Zustandes.

Satz 2.76. *Der Vektor $k^A = (k_i^A : i \in I)$ ist die minimale nicht negative Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & : i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A & : i \notin A. \end{cases} \tag{2.44}$$

Beweis. Wir zeigen wieder zuerst, dass k^A das Gleichungssystem löst. Wenn $X_0 = i \in A$ ist, dann ist $H_A = 0$ und damit $k_i^A = 0$. Ist $X_0 = i \notin A$, dann ist $H_A \geq 1$ und mit Markoveigenschaft gilt

$$\mathbb{E}_i[H_A | X_1 = j] = 1 + \mathbb{E}_j[H_A].$$

Es folgt

$$k_i^A = \mathbb{E}_i[H_A] = \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i[H_A \mathbb{1}_{\{X_1 = j\}}] = \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i[H_A | X_1 = j] \mathbb{P}_i(X_1 = j) = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A.$$

Nehmen wir nun an, dass $y = (y_i : i \in I)$ eine weitere Lösung von (2.44) ist. Dann ist $k_i^A = y_i = 0$ für alle $i \in A$. Für $i \notin A$ gilt

$$y_i = \sum_{j \in I} p_{ij} y_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} y_j.$$

Setzen wir das für y_j in der Summe auf der rechten Seite ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} y_j \\ &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} \Big(1 + \sum_{k \notin A} p_{jk} y_k\Big) \\ &= \mathbb{P}_i(H_A \geq 1) + \mathbb{P}_i(H_A \geq 2) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} y_k. \end{aligned}$$

Wiederholen wir das Ersetzen von x in der letzten Summe mehrfach, dann folgt nach n Schritten

$$y_i = \mathbb{P}_i(H_A \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_i(H_A \geq n) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} y_{j_n}.$$

Wenn x nicht negativ ist, dann ist die Summe auf der rechten Seite nicht negativ und es folgt $y_i \geq \mathbb{P}_i(H_A \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_i(H_A \geq n)$ für alle n und somit

$$y_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(H_A \geq n) = \mathbb{E}_i[H_A] = k_i^A.$$

□

Beispiel 2.77 (Zeit bis zum Ruin oder Gewinn)**.** Wir betrachten dieselbe Situation wie in Beispiel 2.72 und für $A = \{0, N\}$ setzen wir $k_i = \mathbb{E}_i[H_A]$, $i \in \{0, \ldots, N\}$. Dann gilt $k_0 = k_N = 0$ und

$$k_i = 1 + pk_{i+1} + qk_{i-1}, \quad i \in \{1, \ldots, N-1\}.$$

Wie in Beispiel 2.72 ist

$$p(k_{i+1} - k_i) - q(k_i - k_{i-1}) = -1$$

und

$$k_i - k_1 = \sum_{j=1}^{i} (k_j - k_{j-1}).$$

Das Gleichungssystem kann ähnlich wie in Beispiel 2.72 gelöst werden und man erhält z.B. in dem Fall $p = q = 1/2$

$$k_i = i(N - i).$$

3 Markovketten in stetiger Zeit

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Markovketten in stetiger Zeit auf abzählbaren Zustandsräumen. Die Exponentialverteilung, an die wir im Abschnitt 3.1 erinnern, spielt dabei wegen ihrer Gedächtnislosigkeit eine wichtige Rolle. Im Abschnitt 3.2 behandeln wir den Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$, der, wie wir später sehen werden, selbst ein Beispiel für eine Markovkette in stetiger Zeit ist. Außerdem kann man mit Hilfe von Poissonprozessen allgemeine Markovketten in stetiger Zeit konstruieren. Ist beispielsweise $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine Markovkette in diskreter Zeit, dann ist $(Y_t)_{t\geq 0}$ definiert durch $Y_t = X_{N_t}$ eine Markovkette in stetiger Zeit.

3.1 Exponentialverteilung

In diesem Abschnitt erinnern wir an die Exponentialverteilung und beweisen einige Eigenschaften, die wir später benötigen. Eine Zufallsvariable T ist exponential verteilt mit Rate λ, wir schreiben dann $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, wenn ihre Verteilungsfunktion durch

$$F_T(t) := \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ für alle } t \geq 0 \tag{3.1}$$

gegeben ist. Die Dichte von T ist dann natürlich

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t\geq 0\}}. \tag{3.2}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$ und $\mathrm{Var}[T] = 1/\lambda^2$ ist. Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialverteilung, die sie von allen anderen stetigen Verteilungen unterscheidet, ist die Gedächtnislosigkeit.

Satz 3.1. *Für $T \sim Exp(\lambda)$ gilt*

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s), \quad t, s \geq 0. \tag{3.3}$$

Außerdem ist die Exponentialverteilung die einzige stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft[1]

Beweis. Es gilt für $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t + s | T > t) &= \frac{\mathbb{P}(T > t + s, T > t)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s).\end{aligned}$$

[1]Bei den diskreten Verteilungen ist es die geometrische Verteilung.

Es sei F die Verteilungsfunktion einer gedächtnislosen Verteilung. Wir definieren $U(t) = 1 - F(t)$. Wie oben folgt

$$\frac{1 - F(t+s)}{1 - F(t)} = 1 - F(s).$$

Damit erfüllt U die Cauchysche Funktionalgleichung

$$U(t+s) = U(t)U(s).$$

Außerdem ist U beschränkt. Es ist bekannt (siehe z.B. Billingsley 1995, A20), dass dann für ein α, $U(t) = e^{-\alpha t}$ gelten muss. Wegen $U(t) \to 0$ für $t \to \infty$ muss α positiv sein. Also folgt $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, was den Beweis beendet. □

Das folgende Resultat zeigt, dass Summen von unabhängigen exponential verteilten Zufallsvariablen entweder mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergent oder mit Wahrscheinlichkeit 1 divergent sind.

Satz 3.2. *Es sei $S_1, S_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $S_n \sim Exp(\lambda_n)$, $0 < \lambda_n < \infty$ für alle n.*

(i) Ist $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, dann gilt $\mathbb{P}\left(\sum_n S_n < \infty\right) = 1$.

(ii) Ist $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, dann gilt $\mathbb{P}\left(\sum_n S_n = \infty\right) = 1$.

Beweis. (i) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$, dann gilt nach dem Satz von monotoner Konvergenz

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} S_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$$

und damit auch $\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n < \infty\right) = 1$.

(ii) Sei nun umgekehrt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n} = \infty$. Um das zu zeigen reicht es den Fall $\frac{1}{\lambda_n} \to 0$ zu betrachten, denn andernfalls ist $\frac{1}{\lambda_n+1}$ keine Nullfolge und die Reihe ist divergent. Ist $\frac{1}{\lambda_n} \to 0$, so gilt $\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} \uparrow 1$ für $n \to \infty$. Gegeben $\varepsilon > 0$ wähle n_0 so, dass für $n \geq n_0$

$$0 < 1 - \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} < \varepsilon,$$

was äquivalent zu

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\lambda_n} < \frac{1}{1+\lambda_n}$$

ist. Damit ist

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n} \geq (1-\varepsilon) \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Nun gilt nach dem Satz von monotoner Konvergenz und Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} S_n\right\}\right] &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{n=1}^{N} S_n\right\}\right] = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[\exp\{-S_n\}\right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{N} \log\left(1 - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\right\} \le \exp\left\{-\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+\lambda_n}\right\} \xrightarrow{N\to\infty} 0,$$

und es folgt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \infty\right) = 1.$$

□

Satz 3.3. *Es sei Z eine endliche oder eine abzählbar unendliche Menge und seien $(S_n)_{n\in Z}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $S_n \sim Exp(\lambda_n)$ für $\lambda_n \in (0,\infty)$. Wir setzen*

$$\lambda := \sum_{n\in Z} \lambda_n \quad \textit{und} \quad S := \inf_{n\in Z} S_n.$$

Ist $\lambda < \infty$, dann gibt eine Z-wertige Zufallsvariable K mit $S = S_k$ und $S_k < S_j$, $j \neq k$ fast sicher auf $\{K = k\}$. Ferner sind die Zufallsvariablen K und S unabhängig und es gilt $S \sim Exp(\lambda)$ und $\mathbb{P}(K = k) = \lambda_k/\lambda$.

Beweis. Wir setzen $K = k$, wenn $S_k < S_j$ für alle $j \neq k$ und lassen es ansonsten undefiniert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K = k \text{ und } S \ge t) &= \mathbb{P}(S_k \ge t \text{ und } S_j > S_k \text{ für alle } j \neq k) \\ &= \int_t^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k s} \mathbb{P}(S_j > s \text{ für alle } j \neq k)\, ds \\ &= \int_t^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k s} \prod_{j\neq k} e^{-\lambda_j s}\, ds \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda} \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, ds = \frac{\lambda_k}{\lambda} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{P}(K = k \text{ für ein } k \in Z) = 1$, also gibt es fast sicher ein minimales Element. Außerdem sind K und S unabhängig mit den behaupteten Verteilungen. □

3.2 Poissonprozess

Der klassische Poissonprozess $(N_t : t \ge 0)$ ist ein $\mathbb{N}_0$-wertiger *Zählprozess* auf $\mathbb{R}_+$. Dabei kann man typischerweise N_t als Anzahl bestimmter Ereignisse, wie z.B. eingehenden Anrufen bei einer Hotline, Schadensfällen bei einer Versicherung oder Klicks eines Geigerzählers, bis zur Zeit t interpretieren.

Definition 3.4. Eine Familie $(N_t : t \geq 0)$ von $\mathbb{N}_0$ - wertigen Zufallsvariablen heißt *Poissonprozess mit Intensität* $\lambda > 0$, wenn

(i) $N_0 = 0$

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ist die Familie $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}} : i = 1, \ldots, n)$ unabhängig.

(iii) Für $0 \leq s < t$ ist $N_t - N_s$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$.

Oft verlangt man auch, dass die Pfade des Poissonprozesses rechtsseitig stetig mit linksseitigen Grenzwerten sind. Wir werden hier darauf nicht näher eingehen, bei der Konstruktion, die wir später angeben ist es aber automatisch der Fall.

Bemerkung 3.5. Poisonprozesse sind einfache Zählprozesse in dem Sinne, dass zu jedem Zeitpunkt höchstens ein Ereignis pro Zeitpunkt auftritt. Dass in dem Intervall $(0,1]$ kein mehrfaches Ereignis auftritt zeigt man wie folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{es gibt ein mehrfaches Ereignis in } (0,1]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \{N_{(k+1)2^{-n}} - N_{k2^{-n}} \geq 2\} \right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{2^n-1} \{N_{(k+1)2^{-n}} - N_{k2^{-n}} \leq 1\} \right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{P}\left(\{N_{(k+1)2^{-n}} - N_{k2^{-n}} \leq 1\} \right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{P}\left(\{N_{2^{-n}} \leq 1\}\right)\right)^{2^n} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} (e^{-2^{-n}\lambda} + e^{-2^{-n}\lambda} 2^{-n}\lambda)^{2^n} \\
&= 1 - e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\lambda}{2^n})^{2^n} = 0.
\end{aligned}$$

□

Nun geben wir eine Konstruktion des Poissonprozesses mit Hilfe exponential verteilter Wartezeiten zwischen den Ereignissen an. Seien also $S_1, S_2, \ldots$ unabhängige exponential verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ. Wir setzen

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$$

und definieren

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\}.$$

Dann ist $\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}$ und es folgt, dass N_t rechtsstetige, stückweise stetige Pfade haben. An Unstetigkeitsstellen springt N_t um $+1$ hoch.

Satz 3.6. *Die Familie* $(N_t : t \geq 0)$ *ist ein Poissonprozess mit Intensität* λ.

Beweis. Die Eigenschaft $N_0 = 0$ fast sicher ist klar. Es bleibt also zu zeigen, dass für $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ die Familie $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}} : i = 1, \dots, n)$ unabhängig ist und jeweils $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ Poisson-verteilt mit Parameter $(\lambda(t_i - t_{i-1}))$ ist. Wir beschränken uns hier auf den Fall $n = 2$.

Wir haben also zu zeigen, dass für $0 < s < t$

$$\mathbb{P}\left(N_s = k, N_t - N_s = m\right) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^m}{m!}. \tag{3.4}$$

Die Dichte der Verteilung des Vektors $S_1, \dots, S_{k+m+1}$ auf $\mathbb{R}_+^{k+m+1}$ ist

$$f(x_1, \dots, x_{k+m+1}) = \lambda^{k+m+1} e^{-\lambda Z_{k+m+1}(x)},$$

wobei $Z_n(x) = x_1 + \cdots + x_n$, $n = 1, \dots, k+m+1$.

Sei zunächst $m \geq 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = m) &= \mathbb{P}(T_k \leq s < T_{k+1}, T_{k+m} \leq t < T_{k+m+1}) \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_1 \dots dx_{k+m+1} \\ &\qquad \lambda^{k+m+1} e^{-\lambda Z_{k+m+1}(x)} \mathbb{1}_{\{Z_k(x) \leq s < Z_{k+1}(x)\}} \mathbb{1}_{\{Z_{k+m}(x) \leq t < Z_{k+m+1}(x)\}}.\end{aligned}$$

Um nach x_{k+m+1} zu integrieren substituieren wir $z = Z_{k+m+1}(x)$ und erhalten

$$\int_0^\infty dx_{k+m+1} \lambda^{k+m+1} e^{-\lambda Z_{k+m+1}(x)} \mathbb{1}_{\{Z_{k+m+1}(x) > t\}} = \lambda^{k+m} \int_t^\infty dz \lambda e^{-\lambda z} = \lambda^{k+m} e^{-\lambda t}.$$

Nun integrieren wir über $x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$. Mit Substitution

$$y_1 = Z_{k+1} - s, y_2 = x_{k+2}, \dots, y_m = x_{k+m}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_{k+1} \dots dx_{k+m} \mathbb{1}_{\{s < Z_{k+1}(x) \leq Z_{k+m}(x) \leq t\}} \\ &\qquad = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty dy_1 \dots dy_m \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_m \leq t-s\}} = \frac{(t-s)^m}{m!}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit kann man durch Induktion über m zeigen. Genauso folgt dann

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty dx_1 \dots dx_k \mathbb{1}_{\{Z_k(x) \leq s\}} = \frac{s^k}{k!}.$$

Mit den letzten drei Displays folgt nun

$$\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = m) = e^{-\lambda t} \lambda^{k+m} \frac{(t-s)^m}{m!} \frac{s^k}{k!},$$

was gerade (3.4) für $m \geq 1$ entspricht. Der Term für $m = 0$ ergibt sich durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = 0) &= \mathbb{P}(N_s = k) - \mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s \geq 1) \\ &= e^{-\lambda s}\frac{s^k}{k!}\left(1 - \sum_{m=1}^\infty e^{-\lambda(t-s)}\frac{(t-s)^m}{m!}\right) = e^{-\lambda s}\frac{s^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.7. Für einen gegebenen Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ mit Rate λ kann man die Folge der zugehörigen Sprungzeiten $(T_n)_{n=0,1,\ldots}$ definieren. Mit den Eigenschaften (i)-(iii) in Definition 3.4 kann man zeigen, dass die Wartezeiten $S_n = T_n - T_{n-1}$ zwischen den Sprüngen notwendigerweise unabhängige exponential verteilte Zufallsvariablen sind. Für einen Beweis verweisen wir auf (Thm. 1.1 Brémaud 1999, S. 325).

Seien nun $N^1 := (N_t^1)_{t\geq 0}$ und $N^2 := (N_t^2)$ zwei unabhängige Poissonprozesse auf $\mathbb{R}_+$ mit Intensität $\lambda_1 > 0$ und λ_2. Dann haben N^1 und N^2 keine gemeinsame Sprünge und $N := (N_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$N_t = N_t^1 + N_t^2$$

ist ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Die Eigenschaft (i) von Definition 3.4 ist klar; (ii) folgt aus der Unabhängigkeit der Zuwächse von N^1 und N^2; (iii) folgt daraus, dass die Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen mit Parameter a und b Poisson-verteilt ist mit Parameter $a + b$. Ferner folgt wie in Bemerkung 3.5, dass N keine mehrfachen Ereignisse, also keine Sprünge höher als 1 hat. Damit haben N^1 und N^2 keine gemeinsamen Sprünge.

Dieses Resultat lässt sich wie folgt auch auf endlich oder abzählbar unendlich viele Poissonprozesse verallgemeinern.

Satz 3.8. *Es sei $(N^i)_{i\geq 1}$ eine Familie unabhängiger Poissonprozesse jeweils mit Intensität $\lambda_i > 0$. Dann gilt*

(i) je zwei Poissonprozesse haben keine gemeinsamen Sprünge;

(ii) wenn

$$\lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

dann ist $(N_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$N_t := \sum_{i=1}^{\infty} N_t^i$$

ein Poissonprozess mit Intensität λ.

Beweis. Übung! □

Im obigen Theorem haben wir unabhängige Poissonprozesse aufaddiert und als Ergebnis wieder einen Poissonprozess erhalten. Diese Eigenschaft heißt *Superposition (Überlagerung)*. Wir schließen diesen Abschnitt mit der Umkehrung dieser Eigenschaft, die man *Thinning (Ausdünnung)* nennt.

Sei N ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ und sei $(T_n)_{n=1,2,\ldots}$ die Zugehörige Folge von Sprungzeiten. Ferner seien $(Y_n)_{n=1,2,\ldots}$ unabhängige $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariablen. Wir setzen

$$N_j(t) = \#\{i \leq N_t : Y_i = j\},$$

d.h. bei jedem Sprung von (N_t) entscheidet der Wert der Zufallsvariable bei diesem Sprung bei welchem der $(N_j(t))$ dieser Sprung gezählt wird.

Satz 3.9. *Für jedes j aus dem Wertebereich von Y ist $(N_j(t))_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda\mathbb{P}(Y_i = j)$.*

Beweis. Wir geben einen Beweis im Fall $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ und $\mathbb{P}(Y_i = 2) = 1 - p$ an. Allgemeiner Fall folgt induktiv.

Es ist klar, dass $N_1(0) = N_2(0) = 0$ ist dass die Zuwächse

$$(N_1(t_i) - N_1(t_{i-1}), N_2(t_i) - N_2(t_{i-1})), 1, \leq i \leq n$$

unabhängig (für verschiedene i) sind.

Es bleibt zu zeigen, dass sie auch voneinander unabhängig sind (für dasselbe i) und die richtige Verteilung haben. Seien $Z_1 = N_1(t + s) - N_1(s)$ und $Z_2 = N_2(t + s) - N_2(s)$. Wenn $Z_1 = j$ und $Z_2 = k$, dann gab es in dem Intervall $(s, t + s]$ insgesamt $j + k$ Sprünge. Von denen wurden j dem Prozess N_1 und k dem Prozess N_2 zugewiesen. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_1 = j, Z_2 = k) &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!}\binom{j+k}{j}p^j(1-p)^k \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!}\frac{(j+k)!}{j!k!}p^j(1-p)^k \\
&= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

3.3 Übergangshalbgruppe und die Markoveigenschaft

Definition 3.10. Ein I-wertiger stochastischer Prozess $X := (X(t))_{t\geq 0}$ ist eine *Markovkette in stetiger Zeit (MKSZ)*, wenn für alle $i, j, i_1, \ldots, i_k \in I$, alle $t, s \geq 0$ und alle $s_1, \ldots, s_k \geq 0$ mit $s_i \leq s$ gilt (sofern beide Seiten wohldefiniert sind)

$$\mathbb{P}(X(t + s) = j|X(s) = i, X(s_1) = i_1, \ldots, X(s_k) = i_k) = \mathbb{P}(X(t + s) = j|X(s) = i).$$

Die Markovkette heißt *zeitlich homogen*, falls die rechte Seite nicht von s abhängt.

Wir setzen

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in I},$$

wobei

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t + s) = j|X(s) = i).$$

Dann heißt die Familie $(P(t))_{t\geq 0}$ die *Übergangshalbgruppe* der MKSZ X.

Bemerkung 3.11 (Halbgruppeneigenschaft)**.** Wie im diskreten Fall gilt die Chapman-Kolmogorov Gleichung

$$p_{ij}(t + s) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)p_{kj}(s),$$

was gleichbedeutend mit

$$P(t+s) = P(t)P(s),\ t,s \geq 0$$

ist. Außerdem ist klar, dass

$$P(0) = E$$

ist, wobei E die Einheitsmatrix auf I ist. Diese Eigenschaften erklären den Namen Halbgruppe in der obigen Definition.

Ist $\mu(0) := (\mu_i(0))_{i\in I}$ eine Verteilung auf I mit $\mathbb{P}(X(0) = i) = \mu_i(0)$, dann nennen wir $\mu(0)$ die *Startverteilung von* X. Die Verteilung von X zur Zeit t ist dann gegeben durch

$$\mu(t) = \mu(0)P(t).$$

Ferner gilt für alle $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ und alle $i_1, \ldots, i_k \in I$

$$\mathbb{P}(X(t_1) = i_1, \ldots, X(t_k) = i_k) = \sum_{i\in I} \mu_i(0) p_{ii_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots p_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1}),$$

die *endlichdimensionalen Verteilungen* von X sind also durch die Anfangsverteilung und die Übergangshalbgruppe festgelegt. Wie im diskreten Fall schreiben wir

$$\mathbb{P}_i(\,\cdot\,) = \mathbb{P}(\,\cdot\,|X(0) = i) \ \text{ und } \ \mathbb{P}_\mu(\,\cdot\,) = \sum_{i\in I} \mu_i \mathbb{P}(\,\cdot\,|X(0) = i).$$

Beispiel 3.12 (Poissonprozess ist MKSZ)**.** Es sei $N := (N(t))_{t\geq 0}$ Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$. Für $i, j, i_1, \ldots, i_k \in I$, $s, t \geq 0$ und $0 \leq s_1, \ldots, s_k \leq s$ setzen wir

$$A := \{N(s_1) = i_1, \ldots, N(s_k) = i_k\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t+s) = j | N(s) = i, A) &= \frac{\mathbb{P}(N(t+s) = j, N(s) = i, A)}{\mathbb{P}(N(s) = i, A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = j - i, N(s) = i, A)}{\mathbb{P}(N(s) = i, A)}. \end{aligned}$$

Nun ist $N(t+s) - N(s)$ unabhängig von $N(s)$ und von $N(s_l)$ für $s_l \leq s$. Also gilt

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = j - i, N(s) = i, A) = \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = j - i)\mathbb{P}(N(s) = i, A)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t+s) = j \mid N(s) = i, A) &= \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = j - i) \\ &= \mathbb{P}(N(t+s) = j \mid N(s) = i). \end{aligned}$$

Damit ist N MKSZ. Die Übergangshalbgruppe ist gegeben durch

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(N(t) = j - i) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & : \text{ falls } j \geq i \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Beispiel 3.13. Es sei $(\widehat{X}_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Markovkette in diskreter Zeit mit abzählbarem Zustandsraum I und Übergangsmatrix $\widehat{P} = (\widehat{p}_{ij})_{i,j\in I}$. Ferner sei $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ein unabhängiger Poissonprozess mit Intensität λ. Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ definiert durch

$$X_t = \widehat{X}_{N_t}$$

eine MKSZ (Übung!) mit Übergangshalbgruppe

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \widehat{P}^n,$$

d.h.

$$p_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \widehat{p}_{ij}^{(n)}.$$

Denn es ist

$$\mathbb{P}_i(X(t) = j) = \mathbb{P}_i(\widehat{X}_{N_t} = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\widehat{X}_n = j, N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\widehat{X}_n = j)\mathbb{P}(N_t = n).$$

Man beachte, dass alle Sprungzeiten der MKSZ $(X_t)_{t\geq 0}$ auch Sprungzeiten von $(N_t)_{t\geq 0}$ sind, aber nicht umgekehrt, weil $(\widehat{X}_n)_{n=0,1,\dots}$ eventuell in denselben Zustand springen kann, was sich auf die MKSZ nicht auswirkt.

3.4 Infinitesimaler Generator

Es sei $(P(t))_{t\geq 0}$ eine Übergangshalbgruppe auf I, d.h. für $t, s \geq 0$

(a) $P(t)$ ist eine stochastische Matrix,

(b) $P(0) = E_I$ (Einheitsmatrix auf I),

(c) $P(t + s) = P(t)P(s)$.

Wir nehmen an, dass die Halbgruppe stetig im Ursprung ist, d.h. $P(t) \to P(0) = E_I$ für $t \to 0$. Dann ist sie auf $[0, \infty)$ stetig (Übung!).

Satz 3.14. *Es sei $(P(t))$ eine Übergangshalbgruppe auf einem abzählbarem Zustandsraum I. Dann existiert für jedes $i \in I$ der Grenzwert*

$$q_i := \lim_{h\to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \in [0, \infty]. \tag{3.6}$$

Ferner existiert für alle $i \neq j$ aus I der Grenzwert

$$q_{ij} := \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \in [0, \infty). \tag{3.7}$$

Beweis. Für $t \geq 0$ und $n \geq 1$ gilt $P(t) = (P(t/n))^n$ und somit $p_{ii}(t) \geq (p_{ii}(t/n))^n$ für alle $i \in I$. Wegen $p_{ii}(h) \to 1$ für $h \downarrow 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $p_{ii}(h) > 0$ für $h \in [0, \varepsilon]$. Für jedes $t \geq 0$ ist $t/n \in [0, \varepsilon]$ für genügend großes n. Also ist $p_{ii}(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Die Funktion f_i definiert auf $[0, \infty)$ durch

$$f_i(t) = -\log p_{ii}(t)$$

ist reellwertig, nicht-negativ und es gilt $f_i(h) \to 0$ für $h \downarrow 0$. Aus

$$p_{ii}(t+s) = \sum_{j \in I} p_{ij}(t) p_{ji}(s)$$

folgt

$$p_{ii}(t+s) \geq p_{ii}(t) p_{ii}(s)$$

und somit

$$f_i(t+s) \leq f_i(t) + f_i(s),$$

d.h. f_i ist sub-additiv und es folgt

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f_i(h)}{h} = \sup_{t > 0} \frac{f_i(t)}{t} =: q_i$$

(siehe Brémaud 1999, Theorem 1.11, S. 423). Damit erhalten wir

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - e^{-f_i(h)}}{f_i(h)} \frac{f_i(h)}{h} = q_i.$$

Nun betrachten wir den Fall $i \neq j$. Da $p_{ii}(t)$ und $p_{jj}(t)$ für $t \downarrow 0$ gegen 1 konvergieren, gibt es für jedes $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ ein $\delta > 0$ so, dass für $t \in [0, \delta]$ jeweils $p_{ii}(t) > c$ und $p_{jj}(t) > c$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h = h(n) > 0$ so, dass $0 < nh < \delta$. Ferner sei $(X(t))_{t \geq 0}$ MKSZ mit Übergangshalbgruppe $(P(t))_{t \geq 0}$. Dann ist $(\widehat{X}_m)_{m=0,1,\ldots}$ mit $\widehat{X}_m = X(mh)$ eine MK in diskreter Zeit mit Übergangsmatrix $\widehat{P} = P(h)$. Es gilt

$$p_{ij}(nh) \geq \sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{P}(\cap_{l=1}^{r-1} \{X_l \neq j\}, X_r = i | X_0 = i) p_{ij}(h) \mathbb{P}(X_n = j | X_{r+1} = j).$$

Nach der Wahl von δ, n und h gilt $\mathbb{P}(X_n = j | X_{r+1} = j) \geq c$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\cap_{l=1}^{r-1} \{X_l \neq j\}, X_r = i | X_0 = i) \\
&\qquad = \mathbb{P}(X_r = i | X_0 = i) - \sum_{k<r} \mathbb{P}(\cap_{l=1}^{k-1} \{X_l \neq j\}, X_k = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_r = i | X_k = j) \\
&\qquad \geq c - (1-c) \sum_{k<r} \mathbb{P}(\cap_{l=1}^{k-1} \{X_l \neq j\}, X_k = j | X_0 = i) \\
&\qquad \geq c - (1-c) = 2c - 1,
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für $i \neq j$

$$\mathbb{P}(X_r = i | X_k = j) + \mathbb{P}(X_r = j | X_k = j) \leq 1$$

und somit

$$\mathbb{P}(X_r = i | X_k = j) \leq 1 - \mathbb{P}(X_r = j | X_k = j) \leq 1 - c.$$

Es folgt

$$p_{ij}(nh) \geq c(2c-1)np_{ij}(h),$$

was man als

$$\frac{p_{ij}(h)}{h} \leq \frac{1}{c(2c-1)} \frac{p_{ij}(nh)}{nh} \tag{3.8}$$

schreiben kann. Seien nun $t, h < \delta$ und sei $n = \lfloor t/h \rfloor$ (ganzzahliger Anteil von t/h), sodass $\lim_{h \downarrow 0} nh = t$. Damit und mit (3.8) folgt

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leq \frac{1}{c(2c-1)} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty,$$

woraus wir

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leq \frac{1}{c(2c-1)} \liminf_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty$$

erhalten. Für $c \uparrow 1$ konvergiert $\frac{1}{c(2c-1)}$ gegen 1 und da wir c beliebig nah an 1 wählen können, folgt

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \leq \liminf_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

Also existiert $\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$ und ist endlich. $\square$

Definition 3.15. Setzen wir $q_{ii} = -q_i$ für $i \in I$, so heißt die Matrix

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in I} \tag{3.9}$$

der *infinitesimale Generator* (oft auch *Q-Matrix* genannt) der Übergangshalbgruppe. Das obige Theorem besagt dann, dass

$$Q = \lim_{h \to 0} \frac{P(h) - P(0)}{h}$$

komponentenweise gilt. Q ist also Ableitung der Abbildung $t \mapsto P(t)$ in 0.

Aus der Halbgruppeneigenschaft der Übergangshalbgruppe $(P(t))_{t\geq 0}$ folgt

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h)-E_I}{h} = \frac{P(h)-E_I}{h}P(t), \tag{3.10}$$

d.h.

$$\left(\frac{P(t+h)-P(t)}{h}\right)_{ij} = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)\left(\frac{P(h)-E_I}{h}\right)_{kj} = \sum_{k\in I}\left(\frac{P(h)-E_I}{h}\right)_{ik} p_{kj}(t).$$

Wenn wir den Grenzwert $h\downarrow 0$ und die Summe vertauschen können (z.B. wenn I endlich ist), dann folgt mit $h\to 0$

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q = QP(t).$$

Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t), \quad \text{bzw. für } i,j\in I \quad \frac{d}{dt}p_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k\in I\setminus\{i\}} q_{ik}p_{kj}(t) \tag{3.11}$$

heißt die *Rückwärtsgleichung*. Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q, \quad \text{bzw. für } i,j\in I \quad \frac{d}{dt}p_{ij}(t) = -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k\in I\setminus\{i\}} p_{ik}(t)q_{kj} \tag{3.12}$$

heißt die *Vorwärtsgleichung*.

Definition 3.16. Eine Übergangshalbgruppe $(P(t))$ heißt *konservativ*, falls ihr infinitesimaler Generator $Q=(q_{ij})_{i,j\in I}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $q_{ij}\geq 0$, $j\neq i$,

(ii) $q_i = -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty$ für alle $i\in I$.

Bedingung (i) ist nach (3.7) immer erfüllt. Bedingung (ii) beinhaltet aber zwei Forderungen: die Zeilensummen von Q müssen gleich Null sein und die q_i müssen endlich sein. Falls q_i unendlich ist, so heißt es, dass der Zustand i von der Markovkette immer sofort verlassen wird. Derartige Beispiele spielen in den Anwendungen keine große Rolle. Dass es natürlich ist zu fordern, dass die Zeilensummen von Q gleich Null sein müssen sieht man wie folgt. Ist $(P(t))_{t\geq 0}$ die Übergangshalbgruppe einer MKSZ, so gilt für alle i

$$\sum_{j\in I} p_{ij}(h) = 1,$$

was äquivalent zu

$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h} = \sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(h)}{h}$$

ist. Mit $h \downarrow 0$ folgt

$$q_i = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Wenn die Vertauschung von Summe und Grenzwert erlaubt ist (geht immer wenn I endlich ist), dann erhalten wir

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Ist eine homogene MKSZ $((X(t))_{t \geq 0}$ konservativ, so gilt nach Theorem 3.14

$$\mathbb{P}(X(t+h) = i | X(t) = i) = p_{ii}(h) = 1 - hq_i + o(h)$$

und für $j \neq i$

$$\mathbb{P}(X(t+h) = j | X(t) = i) = p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h).$$

Satz 3.17 (Kolmogorov's Differentialgleichungen)**.** *Ist die Übergangshalbgruppe* $(P(t))_{t \geq 0}$ *konservativ und ist* Q *der zugehörige infinitesimale Generator, dann gilt die Rückwärtsgleichung* (3.11)*. Gilt zusätzlich für alle* $i \in I$ *und* $t \geq 0$

$$\sum_{k \in I} p_{ik}(t) q_k < \infty,$$

dann gilt auch die Vorwärtsgleichung (3.12)*.*

Beweis. Siehe Theorem 3.1 auf S. 340 und Theorem 3.2 auf S. 341 in (Brémaud 1999). □

Beispiel 3.18 (Q-Matrix des Poissonprozesses)**.** Wir haben schon in einem Beispiel gesehen, dass ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ eine MKSZ ist. Aus (3.5) rechnet man leicht die Q-Matrix aus. Für $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda & : \text{ wenn } i = j, \\ \lambda & : \text{ wenn } j = i + 1, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 3.19 (Intuitive Konstruktion einer MKSZ)**.** Obiges Beispiel und Theorem 3.6 legen (im konservativen und stabilen Fall) folgende Konstruktion einer MKSZ mithilfe der Q-Matrix nahe. Gegeben $X_t = i$ sei τ eine exponential verteilte Zufallsvariable mit Parameter $q_i = -q_{ii}$. Zur Zeit $t + \tau$ springt die Markovkette in einen neuen Zustand. Dabei springt sie in den Zustand j mit Wahrscheinlichkeit q_{ij}/q_i. Dann wartet man wieder eine exponential verteilte Zeit mit Parameter q_j bis die Markovkette springt. Sie springt in den Zustand k mit Wahrscheinlichkeit q_{jk}/q_j usw...

Beispiel 3.20. (Geburts- und Todesprozess) Es sei $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ und für $\mu_i, \lambda_i \geq 0$ für alle $i \in I$ sei $Q = (q_{ij})_{ij \in I}$ definiert durch

$$q_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i)$$

und für $i \neq j$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & : \text{wenn } j = i + 1 \\ \mu_i & : \text{ wenn } j = i - 1, i \geq 1 \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Zugehörige Markovkette heißt *Geburts- und Todesprozess*. Diese Prozesse werden im Folgenden oft als Beispiele auftauchen.

In dem linearen Fall $\lambda_n = n\lambda$ und $\mu_n = n\mu$ ist der Geburts- und Todesprozess ein Spezialfall eines Verzweigungsprozesses, eines Populationsprozesses also, bei dem sich Individuen untereinander unabhängig verhalten. Jedes Individuum lebt eine exponential verteilte Zeit mit Parameter $(\lambda + \mu)$. Wenn es stirbt wird es durch zwei Nachkommen ersetzt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ hat das Individuum keine Nachkommen. Die Nachkommen verhalten sich nach denselben Regeln unabhängig voneinander und unabhängig von der restlichen Population. Der Zustand 0 ist ein Absorbierender Zustand, was gleichbedeutend damit ist, dass die Population ausgestorben ist. Die Aussterbewahrscheinlichkeit ist eine wichtige Größe bei Verzweigungsprozessen.

Ist $(P(t))_{t \geq 0}$ die Übergangshalbgruppe des linearen Geburts- und Todesprozesses so gilt wegen der Unabhängigkeit der Individuen

$$p_{k0}(t) = (p_{10}(t))^k,$$

d.h. die Aussterbewahrscheinlichkeit von k Individuen bis zur Zeit t ist die k-te Potenz der Aussterbewahrscheinlichkeit eines Individuums.

Definition 3.21. Ein stochastischer Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ auf I (nicht notwendigerweise abzählbar) ist ein *Sprungprozess* falls für fast alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \geq 0$ ein $\varepsilon(t, \omega) > 0$ existiert so dass

$$X(s, \omega) = X(t, \omega) \quad \text{für alle } s \in [t, t + \varepsilon(t, \omega)).$$

Es ist ein *regulärer Sprungprozess* falls für fast alle ω die Menge $A(\omega)$ der Unstetigkeitsstellen von $t \mapsto X(t, \omega)$ in jedem kompakten Intervall nur endlich viele Punkte hat, d.h. für jedes $c \geq 0$ gilt

$$|A(\omega) \cap [0, c]| < \infty.$$

Eine *reguläre homogene Markovkette in stetiger Zeit* ist eine homogene Markovkette in stetiger Zeit die ein regulärer Sprungprozess ist.

Für jeden Sprungprozess gibt es eine Folge von Sprungzeiten $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ und eine Folge $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ so, dass

$$X(t) = X_n \quad \text{ für } \tau_n \leq t < \tau_{n+1}.$$

Dadurch ist $(X(t))_{t\geq 0}$ festgelegt auf $[0, \tau_\infty)$, wobei $\tau_\infty = \lim_{n\uparrow\infty} \tau_n$ die *Explosionszeit* heißt. Wenn $(X(t))_{t\geq 0}$ regulär ist, dann gilt $\tau_\infty = \infty$ und die Pfade $t \mapsto X(t,\omega)$ sind für fast alle ω rechtsstetig.

Sei nun $(X(t))_{t\geq 0}$ regulär und sei $(\tau_n)_{n=0,1,\ldots}$ die Folge der zugehörigen Sprungzeiten. Wir erweitern die Zustandsmenge um einen Punkt $\Delta \notin I$ und setzen $I_\Delta = I \cup \{\Delta\}$ und definieren

$$X_n = X(\tau_n),$$

wobei wir $X(\infty) = \Delta$ setzen. Dann heißt $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ der eingebettete Prozess.

Beispiel 3.22 (Beispiel einer MKSZ mit endlicher Explosionszeit)**.** Es sei $(X(t))_{t\geq 0}$ eine Geburtskette auf $\mathbb{N}$ mit Q-Matrix gegeben durch $q_{ii} = -\lambda_i$, $q_{i,i+1} = \lambda_i$ und $q_{ij} = 0$ für $j \notin \{i, i+1\}$. Dann ist

$$\mathbb{E}[\tau_\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\tau_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\tau_k - \tau_{k-1}] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Wählt man nun die Folge $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ so, dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert (z.B. $\lambda_k = 2^k$), dann erhält man eine Markovkette die unendlich viele Sprünge in endlicher Zeit macht und somit explodiert. Diese Markovkette ist somit nicht regulär. Wählt man andererseits die Folge $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ so, dass die Reihe auf der rechten Seite divergiert (z.B. $\lambda_k = \lambda k$ oder $\lambda_k = \lambda$), dann erhält man eine reguläre Markovkette (vgl. Theorem 3.2).

Satz 3.23. *Eine reguläre homogene Markovkette in stetiger Zeit ist konservativ.*

Beweis. Siehe Theorem 2.2 auf S. 337 in (Brémaud 1999). □

Bemerkung 3.24 (Berechnung der Übergangshalbgruppe aus der Q-Matrix)**.** Wenn der Zustandsraum I endlich ist dann haben die Vorwärts- und Rückwärtsdifferentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}P(t) = QP(t)$$

mit dem Anfangswert $P(0) = E$ (Einheitsmatrix auf I) eine eindeutige Lösung

$$P(t) = e^{tQ},$$

wobei die Matrix-Exponentialfunktion durch

$$e^C := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!}$$

definiert ist (siehe z.B. Brémaud 1999, Thm 2.1, S. 426).

Falls Q diagonalisierbar ist, dann kann man e^{tQ} wie folgt berechnen. Sei also $I = \{1, \ldots, r\}$ und sei

$$Q = V\Lambda U^T$$

wobei $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte und $V = [v_1, \dots, v_r]$, $U = [u_1, \dots, u_r]$ die Matrizen mit zugehörigen Rechts- bzw. Linkseigenvektoren und $U^T V = E$. Dann gilt

$$Q^n = \left(V \Lambda U^T\right)^n = V\Lambda U^T V \Lambda U^T \dots V\Lambda U^T V \Lambda U^T = V \Lambda^n U^T = V \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_r^n) U^T$$

und somit

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{Q^n}{n!} = V \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\Lambda^n}{n!} U^T = V \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}) U^T.$$

3.5 Stationäre Verteilung

Definition 3.25. Eine *stationäre Verteilung* der Halbgruppe $(P(t))_{t \geq 0}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$ (als Zeilenvektor aufgefasst), so dass für alle $t \geq 0$ gilt

$$\pi P(t) = \pi. \tag{3.13}$$

Hat also $X(0)$ die Verteilung π, so hat für jedes $t \geq 0$ auch $X(t)$ die Verteilung π.

Aus (3.13) folgt für jedes $h \geq 0$ und $i \in I$

$$0 = \frac{1}{h} \left(\pi(P(h) - E)\right)_i = \frac{1}{h} \sum_{j \in I} \pi_j (p_{ij}(h) - \delta_{ij}), \tag{3.14}$$

wobei $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. Ist die Vertauschung des Grenzwertes $h \downarrow 0$ und Summe erlaubt, so folgt

$$\pi Q = 0,$$

π ist also ein Linkseigenvektor von Q zum Eigenwert 0.

Wie im diskreten Fall existiert nicht immer eine stationäre Verteilung. Außerdem ist sie nicht notwendigerweise eindeutig.

Beispiel 3.26 (Endlicher Zustandsraum)**.** Wenn der Zustandsraum endlich ist, dann ist die Vertauschung von Grenzwert und Summe in (3.14) gerechtfertigt und somit gilt $\pi Q = 0$ für jede stationäre Verteilung.

Ist umgekehrt $\pi Q = 0$, so gilt

$$0 = \pi Q P(t) = \pi \frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} \pi P(t),$$

d.h. die Verteilung, der in π gestarteten Markovkette ist konstant in t und somit gleich der Anfangsverteilung π.

Das obige Beispiel zeigt, dass $\pi Q = 0$ auf endlichen Zustandsräumen eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Stationarität von π ist. Allgemeiner gilt das folgende Theorem. Für ein Beweis verweisen wir auf Kapitel 1 in (Anderson 1991).

Satz 3.27. *Sei $X := (X(t))_{t\geq 0}$ eine reguläre homogene Markovkette in stetiger Zeit auf einem abzählbarem Zustandsraum I und Übergangshalbgruppe $(P(t))_{t\geq 0}$. Dann gilt:*

(a) Die Übergangshalbgruppe ist stetig und konservativ.

(b) Die Vorwärts- Rückwärtsdifferentialgleichungen sind erfüllt.

(c) Ein Wahrscheinlichkeitsvektor π auf I ist genau dann eine stationäre Verteilung von X, wenn $\pi Q = 0$ ist, wobei Q der infinitesimale Generator ist.

3.6 Eingebettete Markovkette

Definition 3.28. Es sei $X := (X(t))_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf I. Eine $[0,\infty]$-wertige Zufallsvariable τ heißt *Stoppzeit* von X, wenn $\{\tau \leq t\} \in \sigma(X_s, s \in [0,t])$ für alle $t \geq 0$ ist, d.h. wenn man $\{\tau \leq t\}$ durch die Familie $(X(s), s \in [0,t])$ ausdrücken kann.

Beispiel 3.29. Es sei $X := (X(t))_{t\geq 0}$ eine reguläre MKSZ auf abzählbarem Zustandsraum I, dann ist die erste *Austrittszeit* aus i, definiert durch

$$E_i = \inf\{t \geq 0 : X(t) \neq i\}$$

mit üblicher Konvention $\inf\{\emptyset\} = \infty$. Die erste *Rückkehrzeit* ist definiert durch

$$R_i := \inf\{t \geq 0 : t > E_i \text{ und } X(t) = i\}. \tag{3.15}$$

Dann sind sowohl E_i als auch R_i Stoppzeiten von X.

Wie im diskreten Fall definieren wir den Prozess nach der Stoppzeit τ als

$$(X(\tau + t))_{t\geq 0},$$

wobei wir $X(\infty) = \Delta$ für ein $\Delta \notin I$ ist. Der Prozess vor der Zeit τ ist dann

$$(X(t \wedge \tau))_{t\geq 0}.$$

Satz 3.30 (Starke Markoveigenschaft)**.** *Es sei $X := (X(t))_{t\geq 0}$ eine reguläre MKSZ auf abzählbarem Zustandsraum I und Übergangshalbgruppe $(P(t))_{t\geq 0}$ und Startverteilung μ. Ferner sei τ eine Stoppzeit von X und k ein beliebiger Zustand aus I. Bedingt auf $\{X(\tau) = k\}$ gelten folgende Aussagen:*

(a) $(X(\tau + t))_{t\geq 0}$ und $(X(t \wedge \tau))_{t\geq 0}$ sind unabhängig.

(b) $(X(\tau + t))_{t\geq 0}$ ist reguläre MKSZ mit Übergangshalbgruppe $(P(t))_{t\geq 0}$ und Startverteilung δ_k.

Beweis. Siehe Theorem 4.1 auf S. 346 in (Brémaud 1999). □

Sei nun $(\tau_n)_{n=0,1,\ldots}$ die Folge von Sprungzeiten einer regulären MKSZ $X := (X(t))_{t\geq 0}$ mit $\tau_0 = 0$ und $\tau_n = \infty$ wenn es weniger als n Sprünge im Zeitintervall $(0,\infty)$ gibt (z.B. wenn die Markovkette vor dem n-ten Sprung in einen *absorbierenden*, d.h. $q_i = 0$, Zustand gelangt). Dann ist τ_n für jedes $n \geq 0$ eine Stoppzeit. Ferner ist *der eingebettete Prozess* $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ auf $I_\Delta := I \cup \{\Delta\}$ mit $\Delta \notin I$ definiert durch

$$X_n = X(\tau_n),$$

wobei $X(\infty) = \Delta$.

Satz 3.31. *Es sei $X := (X(t))_{t\geq 0}$ eine reguläre MKSZ auf abzählbarem Zustandsraum I mit infinitesimalem Generator Q, Folge von Sprungzeiten $(\tau_n)_{n=0,1,\ldots}$ und eingebettetem Prozess $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$. Dann gilt*

(a) $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ ist eine Markovkette in diskreter Zeit auf I_Δ mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in I_\Delta}$, wobei

$$p_{ij} := \begin{cases} 1 & : \textit{wenn } (i,j) = (\Delta,\Delta), \\ 1 & : \textit{wenn } i \in I, j = \Delta \textit{ und } q_i = 0, \\ 0 & : \textit{wenn } i \in I, j = \Delta \textit{ und } q_i > 0, \\ \frac{q_{ij}}{q_i} & : \textit{wenn } i,j \in I, i, \neq j \textit{ und } q_i > 0. \end{cases}$$

(b) Gegeben $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ ist die Folge der Zwischenzeiten zwischen den Sprüngen $(\tau_{n+1} - \tau_n)_{n=0,1,\ldots}$ unabhängig und für alle $n = 0,1\ldots$ und $a \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\tau_{n+1} - \tau_n \leq a | (X_k)_{k=0,1,\ldots}\right) = 1 - e^{-q_{X_n} a},$$

d.h. bedingt $(X_k)_{k=0,1,\ldots}$ ist $\tau_{n+1} - \tau_n$ exponential verteilt mit Rate q_{X_n}.

Beweis. Siehe Theorem 4.2 auf S. 348 in (Brémaud 1999). □

Korollar 3.32. *Zwei reguläre MKSZ mit demselben infinitesimalem Generator haben dieselbe Übergangshalbgruppe.*

Bemerkung 3.33. Gegeben einen konservativen Generator Q (d.h. eine Matrix, die Bedingungen (i) und (ii) in Definition 3.16 erfüllt) und eine Verteilung μ auf I kann man mit Hilfe von Theorem 3.31 eine MKSZ wie folgt konstruieren (bzw. simulieren):

1. $\tau_0 = 0$ und $X_0 \sim \mu$, d.h. $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i$;

2. für $n \geq 0$, gegeben $\tau_0, X_0, \tau_1 - \tau_0, X_1, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1}, X_n$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tau_{n+1} - \tau_n \leq a | \tau_0, X_0, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1}, X_n) = 1 - e^{-q_{X_n} a}, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = j | \tau_0, X_0, \ldots, \tau_n - \tau_{n-1}, X_n, \tau_{n+1}) = \frac{q_{X_n j}}{q_{X_n}}. \end{cases}$$

Diese Konstruktion funktioniert solange der Generator *nicht-explosiv* ist (siehe Kap. 9 in (Brémaud 1999)), d.h. wenn für $\tau_\infty := \lim_{n\uparrow\infty} \tau_n$ und jede Verteilung μ auf I

$$\mathbb{P}_\mu(\tau_\infty = \infty) = 1.$$

Satz 3.34 (Reuter's Kriterium)**.** *Es sei Q ein konservativer Generator auf I. Es ist genau dann nicht-explosiv, wenn für alle $\lambda > 0$ das Gleichungssystem*

$$(\lambda + q_i)x_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} x_j, i \in I \tag{3.16}$$

keine nicht-triviale nicht-negative beschränkte Lösung besitzt.

Beweis. Zunächst ist

$$g_i(\lambda) = \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda \tau_\infty\right\}\right] = \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\}\right]$$

gleichmäßig beschränkt in $\lambda > 0$ und $i \in I$. Ferner ist es strikt positiv, wenn $\mathbb{P}(\tau_\infty = \infty) < 1$. Nun rechnen wir nach, dass $x_i = g_i(\lambda)$ eine Lösung von (3.16) ist:

$$\begin{aligned} g_i(\lambda) &= \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda S_1\right\} \exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} S_k\right\}\right] = \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda S_1\right\}\right] \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} S_k\right\}\right] \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_i e^{-q_i t}\, dt \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} S_k\right\}\right] = \frac{q_i}{\lambda + q_i} \mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} S_k\right\}\right]. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert auf der rechten Seite gilt

$$\mathbb{E}_i \left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} S_k\right\}\right] = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} \mathbb{E}_j \left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\}\right] = \frac{1}{q_i} \sum_{j \neq i} q_{ij} g_j(\lambda).$$

Ist also Q explosiv, dann gibt es eine nicht-triviale beschränkte Lösung von (3.16).

Um die andere Richtung zu zeigen, sei $(g_i(\lambda))_{i \in I}$ eine beschränkte nicht-negative Lösung von (3.16). Dann gilt

$$g_i(\lambda) = \mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda S_1\} g_{X_1}(\lambda) | X_0 = i\right],$$

denn es ist

$$\mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda S_1\} g_{X_1}(\lambda) | X_0 = i\right] = \sum_{j \neq i} g_j(\lambda) \frac{q_{ij}}{q_i} \mathbb{E}_i \left[\exp\{-\lambda S_1\}\right] = \sum_{j \neq i} g_j(\lambda) \frac{q_{ij}}{q_i} \frac{q_i}{q_i + \lambda}.$$

Induktiv kann man zeigen

$$g_i(\lambda) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} S_k\right\} g_{X_n}(\lambda) | X_0 = i\right]$$

und es folgt

$$g_i(\lambda) \leq \max_{j \in I} \{g_j(\lambda)\} \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\} | X_0 = i\right].$$

Angenommen es gibt ein i mit $g_i(\lambda) > 0$, dann muss $\mathbb{P}_i\left(\sum_{k=1}^\infty S_k < \infty\right) > 0$ gelten. Das ist aber äquivalent zu $\mathbb{P}_i(\tau_\infty = \infty) < 1$. Der Generator ist in diesem Fall also explosiv. $\square$

3.7 Geburts- und Todesprozesse

Es sei Q ein infinitesimaler Generator auf $I = \mathbb{N}_0$ mit $q_{i,i+1} = \lambda_i$ und $q_{i,i-1} = \mu_i \mathbb{1}_{\{i \geq 1\}}$. Die zugehörige Markovkette heißt *Geburts- und Todesprozess (GTP)*. Im Beispiel 3.22 hatten wir bereits ein Kriterium für Explosivität eines GTP mit $\mu_i = 0$ für alle i, was ein reiner Geburtsprozess ist. Das nächste Resultat ist eine Verallgemeinerung davon.

Satz 3.35 (Reuter's Kriterium für GTP)**.** *Es seien $\lambda_n > 0$ für alle n. Ein Generator eines Geburts- und Todesprozesses ist genau dann nicht-explosiv, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n \dots \mu_1}{\lambda_n \dots \lambda_1 \lambda_0} \right] = \infty. \tag{3.17}$$

Beweis. Das Gleichungssystem (3.16) im Fall von GTP ist

$$\begin{aligned} \lambda x_0 &= -\lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_1, \\ \lambda x_k &= \mu_k x_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) x_k + \lambda_k x_{k+1}, \ (k \geq 1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Es ist klar, dass die Lösung trivial ist genau dann, wenn $x_0 = 0$ ist. Ist $x_0 > 0$, so taucht es in jeder Lösung als multiplikative Konstante auf (in dem Sinne, dass für $k \geq 1$ x_k / x_0 nicht von x_0 abhängt). Also genügt es den Fall $x_0 = 1$ zu betrachten.

Wir zeigen (x_k) ist beschränkt genau dann, wenn die Summe in (3.17) endlich ist. Für $y_k = x_{k+1} - x_k$ folgt aus (3.18) $y_0 = \lambda / \lambda_0$ und

$$y_k = \frac{\lambda}{\lambda_k} x_k + \frac{\mu_k}{\lambda_k} \frac{\lambda}{\lambda_{k-1}} x_{k-1} + \cdots + \frac{\mu_k \dots \mu_2}{\lambda_k \dots \lambda_2} \frac{\lambda}{\lambda_1} x_1 + \frac{\mu_k \dots \mu_1}{\lambda_k \dots \lambda_1} y_0. \tag{3.19}$$

Ist $\lambda > 0$ dann ist $y_k > 0$ und daher ist $(x_k)_{k=0,1,\dots}$ eine strikt wachsende Folge. Es folgt

$$y_k \geq \lambda \left[\frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_k}{\lambda_k \lambda_{k-1}} + \cdots + \frac{\mu_k \dots \mu_2}{\lambda_k \dots \lambda_2 \lambda_1} + \frac{\mu_k \dots \mu_1}{\lambda_k \dots \lambda_1 \lambda_0} \right].$$

Nun ist $x_k = \sum_{l=1}^{k} y_l + 1$. Somit ist die Endlichkeit der Reihe in (3.17) notwendig für die Beschränktheit der x_k.

Um die Rückrichtung zu zeigen, nutzen wir $x_i \leq x_k$ für $i \leq k$ in (3.19) und erhalten

$$y_k \leq \left[\frac{\lambda}{\lambda_k} + \frac{\mu_k}{\lambda_k} \frac{\lambda}{\lambda_{k-1}} + \cdots + \frac{\mu_k \dots \mu_2}{\lambda_k \dots \lambda_2} \frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_k \dots \mu_1 \lambda}{\lambda_k \dots \lambda_1 \lambda_0} \right] x_k.$$

Mit $x_{k+1} = x_k + y_k$ folgt

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\leq \left[1 + \frac{\lambda}{\lambda_k} + \frac{\mu_k}{\lambda_k} \frac{\lambda}{\lambda_{k-1}} + \cdots + \frac{\mu_k \dots \mu_2}{\lambda_k \dots \lambda_2} \frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\mu_k \dots \mu_1 \lambda}{\lambda_k \dots \lambda_1 \lambda_0} \right] x_k \\ &\leq x_k \exp \left\{ \lambda \left(\frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_k}{\lambda_k \lambda_{k-1}} + \cdots + \frac{\mu_k \dots \mu_2}{\lambda_k \dots \lambda_2 \lambda_1} + \frac{\mu_k \dots \mu_1}{\lambda_k \dots \lambda_1 \lambda_0} \right) \right\}, \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung $1 + x \leq e^x$ verwendet haben. Induktiv (mit $x_0 = 1$) folgt

$$x_n \leq \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_k} + \cdots + + \frac{\mu_k \dots \mu_1}{\lambda_k \dots \lambda_1 \lambda_0} \right) \right\}.$$

Daher ist die Lösung $(x_k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. Q ist explosiv, wenn die Summe endlich ist. $\square$

Beispiel 3.36 (Absorbierender Geburts- und Todesprozess)**.** Es sei Q infinitesimaler Generator eines Geburts- und Todesprozesses mit positiven λ_n und μ_n für $n \geq 1$ und mit $\lambda_0 = 0$. Dann ist der Zustand 0 ein absorbierender Zustand der zugehörigen Markovkette $X := (X(t))_{t \geq 0}$. Wir wollen uns nun die Absorptionswahrscheinlichkeit

$$u_i := \mathbb{P}(\text{ es gibt ein } t \geq 0 \text{ mit } \ X(t) = 0 | X(0) = i) \tag{3.20}$$

anschauen. Es ist klar, dass X genau dann absorbiert wird, wenn die zugehörige eingebettete Markovkette $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ absorbiert wird. Letztere ist einfacher zu handhaben und besitzt die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\mu_2+\lambda_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Für $i \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} u_i &= \mathbb{P}_i(\text{ es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } \ X_n = 0) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}_i(\text{ es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } \ X_n = 0 \ \text{ und } \ X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}_j(\text{ es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } \ X_n = 0) p_{ij} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} u_j p_{ij} \end{aligned}$$

und wir erhalten die Gleichung

$$u_i = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} u_{i-1} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i+1} \ \text{ für } i \geq 1 \tag{3.21}$$

mit Randbedingung $u_0 = 1$. Für $i \geq 1$ folgt (schreibe in der obigen Gleichung $u_i = \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i} u_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} u_i$ und löse nach $u_{i+1} - u_i$ auf)

$$u_{i+1} - u_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}(u_i - u_{i-1}).$$

Für $i \geq 1$ erhalten wir induktiv

$$\begin{aligned} u_{i+1} - u_i &= \frac{\mu_i}{\lambda_i}(u_i - u_{i-1}) = \frac{\mu_i}{\lambda_i}\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}(u_{i-1} - u_{i-2}) \\ &= \cdots = \frac{\mu_i \dots \mu_1}{\lambda_i \dots \lambda_1}(u_1 - u_0) = \frac{\mu_i \dots \mu_1}{\lambda_i \dots \lambda_1}(u_1 - 1). \end{aligned}$$

Setzen wir $\gamma_0 = 1$ und $\gamma_i = \frac{\mu_1 \dots \mu_i}{\lambda_1 \dots \lambda_i}$, so folgt für $n > 1$

$$u_n - u_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) = -(1 - u_1) \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i. \tag{3.22}$$

Da u_n Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist, gilt $u_n \in [0,1]$ für alle n. Wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$$

ist, dann muss notwendigerweise $u_1 = 1$ sein. Außerdem folgt dann auch $u_n = u_1 = 1$ für alle n. Unter der Bedingung (3.22) wird also die Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 absorbiert unabhängig vom (endlichen) Startwert.

Sei nun $u_1 \in (0,1)$, was auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty$$

zur Folge hat. Nach (3.22) ist u_n fallend. Es gibt also ein $u \in [0,1]$ mit $u_n \to u$ für $n \to \infty$. Nehmen wir an, dass $u > 0$ ist, dann folgt $u_n \geq u > 0$ für alle n, d.h. unabhängig vom aktuellen Zustand wird die Markovkette mit (derselben) positiver Wahrscheinlichkeit u absorbiert. Mit einem Borel-Cantelli-Argument (vgl. auch Aufgabe 10 auf Blatt 3) folgt $u_n = 1$ für alle n, was $u_1 \in (0,1)$ widerspricht. Also ist notwendigerweise $u = 0$. Mit $n \to \infty$ folgt nun aus (3.22)

$$u_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i}$$

und damit auch

$$u_n = \frac{\sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i}.$$

Nun können wir die Rechnungen auf den linearen Geburts- und Todesprozess anwenden. In diesem Fall ist $\lambda_n = \lambda n$ und $\mu_n = \mu n$ für $n \geq 0$ und positive λ und μ. Ferner ist $\gamma_i = (\mu/\lambda)^i$. Daher ist $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty$ genau dann, wenn $\mu < \lambda$. Das bedeutet, dass der Prozess fast sicher absorbiert wird, wenn $\mu \geq \lambda$. Ist $\mu < \lambda$, dann ist die Aussterbewahrscheinlichkeit bei Start in n gegeben durch

$$u_n = \frac{\sum_{i=n}^{\infty} (\mu/\lambda)^i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu/\lambda)^i} = \frac{\sum_{i=n}^{\infty} (\mu/\lambda)^i}{\sum_{i=0}^{\infty} (\mu/\lambda)^i} = \frac{(\mu/\lambda)^n/(1-(\mu/\lambda))}{1/(1-(\mu/\lambda))} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n.$$

3.8 Langzeitverhalten von Markovketten in stetiger Zeit

In diesem Abschnitt behandeln wir das Langzeitverhalten von MKSZ. Wie im diskreten Fall spielen Irreduzibilität und Rekurrenz eine große Rolle. Den Begriff "periodisch" gibt es für MKSZ aber nicht, weil die Wartezeiten zwischen den Sprüngen eine stetige Verteilung auf $[0,\infty)$ haben.

Definition 3.37. Eine reguläre MKSZ heißt *irreduzibel* falls die eingebettette Markovkette irreduzibel ist. Ein Zustand $i \in I$ heißt *rekurrent* wenn er rekurrent für die eingebettete Markovkette ist. Ansonsten heißt er *transient*. Ein rekurrenter Zustand i heißt *t-positiv rekurrent*, wenn $\mathbb{E}_i[R_i] < \infty$ (dabei wurde R_i in (3.15) definiert), andernfalls heißt der Zustand *t-nullrekurrent*.

Bemerkung 3.38. Um die Rekurrenzbegriffe der MKSZ und der eingebetteten Markovkette voneinander zu unterscheiden sprechen wir von t-positiver Rekurrenz und n-positiver Rekurrenz (und genauso bei Nullrekurrenz). Beide Begriffe sind im Allgemeinen voneinander verschieden, weil die eingebettete Markovkette nicht beachtet wie viel Zeit die MKSZ zwischen den Sprüngen verbringt.

Definition 3.39. Ein *t-invariantes Maß* ist ein nicht-trivialer (komponentenweise) nicht-negativer Vektor $\nu = (\nu_i)_{i\in I}$, so dass für alle $t \geq 0$

$$\nu P(t) = \nu.$$

Ein *n-invariantes Maß* ist ein invariantes Maß für die eingebettete Markovkette.

Satz 3.40. *Es sei $(X(t))_{t\geq 0}$ eine irreduzible, rekurrente und reguläre MKSZ mit infinitesimalem Generator Q. Dann gibt es ein (bis auf einen multiplikativen Faktor) eindeutiges t-invariantes Maß mit $\nu_i > 0$ für alle $i \in I$. Ferner gelten folgende Aussagen:*

(i) Für einen beliebigen Zustand $k \in I$ und die zugehörige Rückkehrzeit R_k gilt

$$\nu_i = \mathbb{E}_k \left[\int_0^{R_k} \mathbb{1}_{\{X(s)=i\}} \, ds \right].$$

(ii) Für einen beliebigen Zustand $k \in I$ sei $\gamma^k = (\gamma_i^k)_{i\in I}$ das kanonische invariante Maß (definiert in (2.28)) der eingebetteten Markovkette. Dann gilt

$$\nu_i = \frac{\gamma_i^k}{q_i} = \frac{\mathbb{E}_k \left[\sum_{n=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \right]}{q_i}.$$

(iii) $\nu Q = 0$.

Beweis. Siehe Thm. 5.1 auf S. 357 in Brémaud (1999). □

Satz 3.41. *Eine irreduzible, rekurrente und reguläre MKSZ mit invariantem Maß ν ist genau dann t-positiv rekurrent, wenn*

$$\sum_{i\in I} \nu_i < \infty.$$

In diesem Fall ist die invariante Verteilung gegeben durch

$$\pi_i = \frac{1}{q_i \mathbb{E}_i[R_i]}.$$

Beweis. Siehe Thm. 5.2 auf S. 359 in Brémaud (1999). □

Wie wir schon oben bemerkt haben, sind die Begriffe t-positiv rekurrent und n-positiv rekurrent im Allgemeinen unterschiedlich. Nach (ii) in Theorem 3.40 ist $\gamma_i^k = q_i \nu_i$ und es sind alle vier Möglichkeiten denkbar:

(i) $\sum_i \gamma_i^k = \infty$ und $\sum_i \nu_i = \infty$ (n- und t-nullrekurrent)

(ii) $\sum_i \gamma_i^k < \infty$ und $\sum_i \nu_i = \infty$ (n-positiv rekurrent, aber t-nullrekurrent)

(iii) $\sum_i \gamma_i^k = \infty$ und $\sum_i \nu_i < \infty$ (n-nullrekurrent, aber t-positiv rekurrent)

(iv) $\sum_i \gamma_i^k < \infty$ und $\sum_i \nu_i < \infty$ (n- und t-positiv rekurrent)

Definition 3.42. Eine irreduzible reguläre MKSZ heißt *ergodisch*, falls sie t-positiv rekurrent ist.

Ergodisch heißt in diesem Zusammenhang, dass die Menge der invarianten Verteilungen nur aus einem Element besteht. Man beachte, dass Ergodizität der MKSZ nicht notwendigerweise die Ergodizität der eingebetteten Markovkette impliziert. Beispielsweise folgt aus der t-positiver Rekurrenz, wie oben bemerkt, nicht die n-positive Rekurrenz.

Satz 3.43. *Eine irreduzible reguläre MKSZ mit infinitesimalem Generator Q ist genau dann ergodisch, wenn es eine Verteilung π auf I gibt mit*

$$\pi Q = 0.$$

Beweis. Siehe Thm. 5.3 auf S. 360 in Brémaud (1999). □

Satz 3.44. *Es sei $(X(t))_{t\geq 0}$ eine ergodische reguläre MKSZ mit Zustandsraum I und Übergangshalbgruppe $(P(t))_{t\geq 0}$. Dann gilt für alle $i, j \in I$*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j,$$

wobei π die eindeutige invariante Verteilung ist.

Beweis. Siehe Thm. 6.1 auf S. 363 in Brémaud (1999). □

Satz 3.45. *Es sei $(X(t))_{t\geq 0}$ eine ergodische Markovkette mit Startverteilung μ und sei π die zugehörige invariante Verteilung. Dann gilt $\mathbb{P}_\mu$ fast sicher*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))\,ds = \sum_{i\in I} f(i)\pi_i$$

für alle $f : I \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{i\in I}|f(i)|\pi_i < \infty$.

Beweis. Siehe Thm. 6.2 auf S. 363 in Brémaud (1999). □

Literaturverzeichnis

Anderson, W. J.: 1991, *Continuous-time Markov chains. An applications-oriented approach.*, Springer-Verlag.

Billingsley, P.: 1995, *Probability and measure. 3rd ed.*, John Wiley & Sons.

Brémaud, P.: 1999, *Markov chains. Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues.*, Springer.

Durrett, R.: 1999, *Essentials of stochastic processes.*, Springer.

Kac, M.: 1947, On the notion of recurrence in discrete stochastic processes, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 1002–1010.

Klenke, A.: 2008, *Wahrscheinlichkeitstheorie.*, 2nd edn, Springer.

Norris, J.: 1997, *Markov chains.*, Cambridge University Press.

Shiryayev, A.: 1984, *Probability.*, Springer.