

# Übungen zur Vorlesung „Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 7

**Abgabetermin: 11.12.2017**, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

## **Aufgabe 1\*** bedingtes Moranmodell

(4 Punkte)

Sei  $Z = NX$  die Anzahl der Allele  $A$  in einer Population der Größe  $N$  und  $T_k$  die Treffzeit von  $k$ .

- Zeigen Sie, dass  $Z$ , bedingt auf  $T_N < T_0$ , ein Geburts-Todes-Prozess ist mit  $\lambda_n = \frac{n+1}{2n}n(N-n) = \frac{1}{2}(n+1)(N-n)$  und  $\mu_n = \frac{n-1}{2n}n(N-n) = \frac{1}{2}(n-1)(N-n)$ .
- Berechnen Sie  $\mathbb{E}_1[T_N | T_N < T_0]$ , d.h. die Fixierungszeit eines neutralen Allels, wenn es auf Fixation bedingt wird.
- Welcher SDE folgt der schwache Grenzwert des Moran-Modells bedingt auf Fixation (d.h.  $T_N < T_0$ ) für große  $N$ ?

Hinweis zu a): Es ist  $\frac{\mathbb{P}_{n\pm 1}[T_N < T_0]}{\mathbb{P}_n[T_N < T_0]} = \frac{n\pm 1}{n}$ .

## **Aufgabe 2\***

(4 Punkte)

Sei  $\mathcal{T}_n$  ein Coaleszent mit  $n$  Blättern. Betrachtet man die zwei von der Wurzel ausgehenden Linien, so hängen an der einen  $I$  und an der anderen  $n - I$  Blätter. Berechnen Sie die Verteilung von  $I$ .

## **Aufgabe 3**

(4 Punkte)

Sei  $\mathcal{T}_\infty$  ein Coaleszent mit unendlich vielen Blättern.

- Sei  $S_n$  die erste Zeit, zu der der Coaleszent  $n$  Blätter hat. Zeigen Sie  $nS_n \rightarrow 2$  mit  $n \rightarrow \infty$ .
- Sei  $K_t$  die Anzahl der Linien im Coaleszenten zur Zeit  $t$ . Zeigen Sie  $tK_t \rightarrow 2$  mit  $t \rightarrow 0$ .