

Übungen zur Vorlesung “Stochastik“

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 19.06.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion mit stetiger Dichte f , d.h. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$, und es gelte $F(0) = 0$. Die Funktion

$$h(y) = \frac{f(y)}{1 - F(y)}$$

heißt *Hazard-Funktion* zu F . Bestimmen Sie zur Hazard-Funktion $h_{\alpha, \lambda}(y) = \lambda y^\alpha$, $y, \lambda > 0$, $\alpha > -1$, die zugehörige Verteilungsfunktion F . Welche Verteilung gehört zu $\alpha = 0$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine standard-normalverteilte Zufallsvariable. Man definiere für jedes $c \geq 0$

$$Y_c := \begin{cases} X & \text{falls } |X| < c, \\ -X & \text{falls } |X| \geq c. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- Alle Y_c sind $N(0, 1)$ -verteilt.
- Es gibt ein $c_0 > 0$ derart, dass X und Y_{c_0} unkorreliert sind. Sind X und Y_{c_0} dann auch unabhängig?
- Ist der Zufallsvektor (X, Y_{c_0}) 2-dimensional normalverteilt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien U_1, U_2 zwei unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, und X_1, X_2 definiert durch

$$X_1 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2), \quad X_2 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2).$$

Zeigen Sie, dass der Zufallsvektor (X_1, X_2) 2-dimensional standard-normalverteilt ist, d.h. X_1, X_2 sind unabhängig und nach $N(0, 1)$ -verteilt.

Hinweis: Berechnen Sie die Dichte von (X_1, X_2) mit Hilfe des Transformationsatzes.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $F(t) = P((-\infty, t])$ eine Verteilungsfunktion auf \mathbb{R} mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß P auf der borelschen σ -Algebra \mathcal{B} . Zeigen Sie:

- F kann nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben.
- Ist F stetig, dann existiert für jedes $a \in [0, 1]$ eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $P(A) = a$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-stochastik-ss-2017>