Discrete Time Finance

SS 2017

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

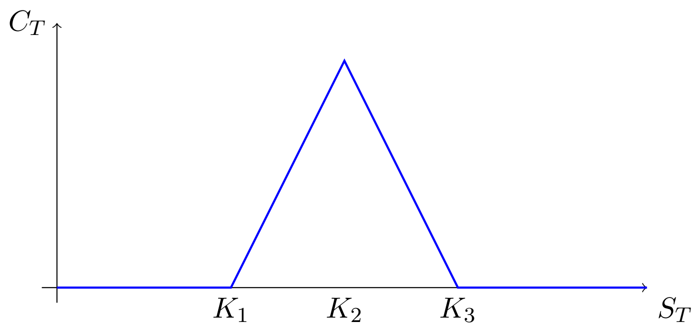
Übung 4

Abgabe: 23.05.2017 zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (1+1,5+1,5 Punkte). Als Profitdiagramm bezeichnet man den Graphen der Auszahlung zu Ende der Laufzeit als Funktion des Preises am Ende der Laufzeit. Eine Call Option auf eine Aktie S mit Maturität T und Strike K hat z.B. die Auszahlfunktion $C_T = \max\{0, S_T - K\}$. Eine entsprechende Put Option hingegen $C_T = \max\{0, K - S_T\}$.

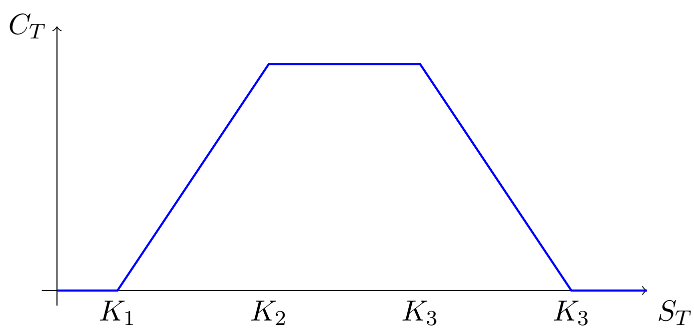
(a) Zeichnen Sie das Profitdiagramm einer Call-Option mit Strike K_1, einer Put-Option mit Strike K_2 und einem Portfolio bestehend aus jeweils einer der vorigen beiden Optionen, wobei wir in allen Fällen Optionen auf den selben Basiswert S und mit gleicher Maturität betrachten. Es gilt $K_1 < K_2$.

(b) Wir betrachten eine Europäische Option auf eine Aktie S mit Maturität T welche das folgende Profitdiagramm hat: Stellen Sie ein Portfolio auf, bestehend aus Call- und Put-



Optionen auf S mit Maturität T welches das gleiche Profitdiagramm erzeugt.

(c) Wie in (b), nur diesmal für das Profitdiagramm



Bitte wenden

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sie $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$. Zeigen Sie das für die Zufallsvariable X dann auch gilt $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$. Zeigen Sie ferner das durch

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}\left[XY\right] \text{ mit } X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}),$$

ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ gegeben ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Ein Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ hat unabhängige und stationäre Zuwächse, wenn

- die Verteilung von $X_{t+s} - X_t$ nur von s abhängt und
- $X_{t+s} - X_t$ unabhängig ist von X_t für alle $s, t \in \mathbb{N}_0$.

Sei X nun ein solcher Prozess mit $X_0 = x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Fälle: $X_1 - X_0$ ist

(a) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

(b) $\mathrm{Exp}(\lambda)$,

(c) $\mathrm{Poi}(\lambda)$,

(d) $\mathrm{Lap}(\mu, \sigma)$

verteilt. Zeigen Sie für jeden dieser Fälle, dass für die charakteristische Funktion dieses Prozesses gilt

$$\varphi_{X_t}(u) = e^{ux + t\psi(u)},$$

für eine zu bestimmende Funktion ψ.

Hinweis: Die Verteilung in (d) finden Sie auf der deutschsprachigen Wikipedia Seite zur Laplace-Verteilung.

Aufgabe 4 (0,5+0,5+1+1+1 Punkte)**.** Für eine Zufallsvariable Z, bezeichne $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ}\right]$ die characteristische Funktion.

(a) Für $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, bestimmen Sie $\varphi_X(t)$.

(b) Für $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, bestimmen Sie $\varphi_X(t)$.

(c) Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, zeigen Sie das es für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ eine i.i.d. Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

und bestimmen Sie welche Verteilung die Y_i haben.

(d) Wie in (c) nur für $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(e) Wie in (c) nur für $X \sim \Gamma(p, b)$.