1 Vorarbeit

Definition 1.1 Die optionale σ-Algebra $\mathcal{O}$ ist die σ-Algebra auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, die von allen adaptierten càdlàg Prozessen erzeugt wird. Die vorhersagbare σ-Algebra $\mathcal{P}$ ist die σ-Algebra auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, die von allen adaptierten linksstetigen Prozessen erzeugt wird. Ein $\mathcal{O}$, bzw. $\mathcal{P}$-messbarer Prozess heißt optional, bzw. vorhersagbar.

Definition 1.2 Ein Semimartingal ist ein Prozess X der Form $X = X_0 + M + A$, wobei X_0 endlich und $\mathcal{F}_0$-messbar, M ein lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und A càdlàg, adaptiert, $A_0 = 0$ und von lokal endlicher Variation sei. Ein spezielles Semimartingal ist ein Semimartingal, bei dem A zusätzlich vorhersagbar sei.

Satz 1.3 *Sei A ein Prozess, der (nach Lokalisierung) folgende Eigenschaften besitzt: Càdlàg, adaptiert, Start in der Null, nichtfallende Pfade, lokal endliche Variation, $E(A_\infty) < \infty$. Es gibt einen Prozess A^p, genannt Kompensator von A, der fast sicher eindeutig und ein vorhersagbarer Prozess mit obigen Eigenschaften ist, welcher eine der folgenden drei äquivalenten Bedingungen erfüllt:*
(i) $A - A^p$ ist ein lokales Martingal
(ii) $E(A^p_T) = E(A_T)$ für alle Stoppzeiten T
(iii) $E[(H \cdot A^p)_\infty] = E[(H \cdot A)_\infty]$ für alle nichtnegativen vorhersagbaren Prozesse H.

Definition 1.4 Seien X und Y zwei optionale Prozesse. X wird L-dominiert von Y, falls $E(|X_T|) \leq E(|Y_T|)$ für jede beschränkte Stoppzeit T.

Lemma 1.5 *Sei X ein adaptierter càdlàg Prozess, der von einem wachsenden Prozess A L-dominiert wird. Für jede Stoppzeit T und alle $\epsilon, \eta > 0$ gilt:*
a) falls A vorhersagbar ist

$$P(\sup_{s \leq T} |X_s| \geq \epsilon) \leq \frac{\eta}{\epsilon} + P(A_T \geq \eta);$$

b) falls A adaptiert ist

$$P(\sup_{s \leq T} |X_s| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}[\eta + E(\sup_{s \leq T} \Delta A_s)] + P(A_T \geq \eta).$$

Definition 1.6 Ein zufälliges Maß auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ ist eine Familie $\mu = (\mu(\omega; dt, dx) : \omega \in \Omega)$ von nichtnegativen Maßen auf $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ für die $\mu(\omega; \{0\} \times \mathbb{R}^d) = 0$ für alle ω gilt.

Wir setzen $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ mit den σ-Algebren $\tilde{O} = \mathcal{O} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Eine Funktion W auf $\tilde{\Omega}$, die $\tilde{\mathcal{O}}$, bzw. $\tilde{\mathcal{P}}$ messbar ist, heißt optionale, bzw. vorhersagbare Funktion. Sei μ ein zufälliges Maß und W eine optionale Funktion auf $\tilde{\Omega}$. Wir definieren den Integralprozess $W * \mu$ über

$$W * \mu_t(\omega) = \int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} W(\omega, s, x) \mu(\omega; ds, dx),$$

falls $\int_{[0,t] \times \mathbb{R}^d} |W(\omega, s, x)| \mu(\omega; ds, dx) < \infty$ und $W * \mu_t(\omega) = \infty$ andernfalls.

Definition 1.7 Das zufällige Maß μ heißt optional, bzw. vorhersagbar, falls $W * \mu$ optional, bzw. vorhersagbar für jede optionale, bzw. vorhersagbare Funktion W ist.
Ein optionales zufälliges Maß μ heißt $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-endlich, falls eine strikt positive Funktion V auf $\tilde{\Omega}$ existiert, so dass $V * \mu_\infty$ integrierbar ist.

Satz 1.8 *Sei μ ein optionales $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-endliches zufälliges Maß. Es existiert ein zufälliges Maß μ^p, genannt Kompensator von μ, welches fast sicher eindeutig, sowie vorhersagbar ist und eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:*
(i) $E(W * \mu^p_\infty) = E(W * \mu_\infty)$ für jede nichtnegative, $\tilde{P}$-messbare Funktion W auf $\tilde{\Omega}$.
(ii) Für jede $\tilde{\mathcal{P}}$-messbare Funktion W auf $\tilde{\Omega}$, für die gilt, dass $|W| * \mu$ (nach Lokalisierung) càdlàg, adaptiert ist, in der Null startet, nicht-fallende Pfade hat und $E(|W| * \mu_\infty) < \infty$, hat $|W| * \mu^p_\infty$ die selben Eigenschaften und $W * \mu^p$ ist der Kompensator des Prozesses $W * \mu$.

Proposition 1.9 *Sei X ein adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger càdlàg Prozess. Dann ist*

$$\mu^X(\omega; dt, dx) = \sum_s 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \epsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx)$$

ein optionales, $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-endliches zufälliges Maß (ϵ bezeichne das Diracmaß).

Satz 1.10 *(Lévy-Khintchin) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion ϕ. Sei $\psi(u) := ln(\phi(u))$. Es gilt: P ist unendlich teilbar, genau dann wenn $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_+$, sowie ein σ-endliches Maß F existieren mit $F(\{0\}) = 0, \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge x^2 F(dx) < \infty$, so dass*

$$\psi(u) = iub - \frac{u^2}{2}c + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x))F(dx).$$

Dabei sei h eine beliebige, beschränkte Borelfunktion mit kompaktem Träger und $h(x) = x$ in einer Umgebung von der Null (schreibe $h \in \mathcal{C}_t^d$).

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Prozess mit stationären, unabhängigen Zuwächsen, Start in der Null und ohne feste Unstetigkeitsstellen. Dann ist X_t für alle $t \geq 0$ unendlich teilbar und wir finden eine Darstellung

$$\psi_t(u) = iub_t - \frac{u^2}{2}c_t + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x))F_t(dx),$$

mit deterministischen $b = (b_t)_{t\geq 0}, c = (c_t)_{t\geq 0}, F = (F_t)_{t\geq 0}$. Außerdem gilt wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse, dass

$$\frac{exp(iuX_t)}{E(exp(iuX_t))} = \frac{exp(iuX_t)}{exp(\psi_t(u))}$$

ein Martingal ist. Sei X nun ein Semimartingal. Im Allgemeinen finden wir keine deterministischen b, c, F, so dass die Martingaleigenschaft hält. Es existieren jedoch vorhersagbare Prozesse B, C, sowie ein zufälliges Maß ν, so dass mit

$$\tilde{\psi}_t(u) = iuB_t - \frac{u^2}{2}C_t + \int (e^{iux} - 1 - iuh(x))\nu([0,t] \times dx)$$

die Martingaleigenschaft (annähernd) hält.
Sei X ein d-dimensionales Semimartingal auf einer stochastischen Basis $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, $h \in \mathcal{C}_t^d$ fest. Wir definieren

$$\hat{X}(h) = \sum_{s\leq \cdot}[\Delta X_s - h(\Delta X_s)],$$

$$X(h) = X - \hat{X}(h).$$

Dann ist $\hat{X}(h)$ adaptiert, càdlàg, von lokal endlicher Variation und startet in der Null. Die Endlichkeit der lokalen Variation folgt aus

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{X}(h)_t) &= \sup_{t_0<\ldots<t_k} \sum_{i=1}^{k} \Big| \sum_{s\in(t_{i-1},t_i]} \Delta X_s - h(\Delta X_s) \Big| \\
&\leq \sum_{s\leq t} |\Delta M_s + \Delta A_s - h(\Delta X_s)|,
\end{aligned}
$$

da ein $b > 0$ existiert, so dass $h(x) = x$ für $|x| \leq b$ und $M(\omega)$ auf jedem Intervall $[0,t]$ nur endlich viele Sprünge mit Sprunghöhe größer als b haben kann. Somit ist $X(h)$ ein Semimartingal. Da $\Delta X(h)$ beschränkt ist, ist es sogar speziell. Wir finden eine Zerlegung $X(h) = X_0 + M(h) + B(h)$, mit $B(h)$ vorhersagbar, insbesondere können wir X folgendermaßen darstellen:

$$X = X_0 + \hat{X}(h) + M(h) + B(h).$$

Definition 1.11 Sei X ein d-dimensionales Semimartingal auf einer stochastischen Basis $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, $h \in \mathcal{C}_t^d$ fest. Wir nennen das Tupel (B, C, ν) Charakteristiken von X (bzgl. h), bestehend aus:
(i) $B = (B^i)_{i\leq d}$ vorhersagbarer, adaptierter càdlàg Prozess mit Start in der Null, nicht-fallenden Pfaden und endlicher Variation auf jedem Intervall $[0,t]$ $(B = B(h))$.
(ii) $C = (C^{ij})_{i,j\leq d}$ stetiger, matrixwertiger, adaptierter càdlàg Prozess mit Start in der Null, nicht-fallenden Pfaden und endlicher Variation auf jedem Intervall $[0,t]$

$$C^{ij} = \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle.$$

(iii) ν vorhersagbares zufälliges Maß auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ (Kompensator des zufälligen Maßes μ^X).

Definition 1.12 Seien X und h wie oben. Wir nennen $(B, \tilde{C}, \nu)$ die modifizierten Charakteristiken von X mit der modifizierten zweiten Charakteristik $\tilde{C}$, wobei

$$\tilde{C}^{ij} = \langle M(h)^i, M(h)^j \rangle$$

2 Straffheitskriterien

Lemma 2.1 *Sei X^n ein $\mathbb{R}^d$-wertiger càdlàg-Prozess für alle n. Angenommen, für alle $q, n \in \mathbb{N}^*$ existiert eine Zerlegung*

$$X^n = U^{nq} + V^{nq} + W^{nq},$$

wobei $(U^{nq})_{n\geq 1}, (V^{nq})_{n\geq 1}$ straff seien (für alle $q \in \mathbb{N}^*$. Außerdem existiere eine Folge (a_q) von reellen Zahlen mit: $\lim_q a_q = 0, \lim_n P^n(\sup_{t\leq N} |\Delta V_t^{nq}| > a_q) = 0 \forall N \in \mathbb{N}^*$*. Weiterhin sei für alle $N \in \mathbb{N}^*, \epsilon > 0, \lim_q \limsup_n P^n(\sup_{t\leq N} |W_t^{nq}| > \epsilon) = 0$. Unter diesen Voraussetzungen ist (X^n) straff.*

Sei $\mathcal{B}^n = (\Omega^n, \mathcal{F}^n, \{\mathcal{F}_t^n\}_{t\geq 0}, P^n)$ eine stochastische Basis für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.2 *Sei $X^n - X_0^n$ ein lokal quadratintegrierbares Martingal auf $\mathcal{B}^n$ für jedes n und sei $G^n = \sum_{j\leq d}\langle X^{n,j}, X^{n,j}\rangle$. Dann ist die Folge (X^n) straff, falls:*
(i) Die Folge (X_0^n) straff ist (im $\mathbb{R}^d$);
(ii) Die Folge (G^n) C-straff ist (in $\mathbb{D}(\mathbb{R})$).

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X^n ein Semimartingal mit Werten in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$.

Satz 2.3 *Es gelte:*
(i) Die Folge (X_0^n) ist straff (im $\mathbb{R}^d$)
(ii) Für alle $N > 0$, $\epsilon > 0$

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^n(\nu^n([0, N] \times \{x : |x| > a\}) > \epsilon) = 0$$

(iii) Jede dieser drei Folgen von Prozessen ist C-straff:

- (B^n)
- $(\tilde{C}^n)$
- $(g_p * \nu^n)_{n\geq 1}$, *mit* $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1, p \in \mathbb{N}^*$.

Dann ist (X^n) straff. Umgekehrt folgt aus Straffheit von (X^n), dass (i) und (ii) gelten.

Lemma 2.4 *a) Für alle $N > 0, a > 0$ sind äquivalent:*
(i) $\lim_n P^n(\sup_{s\leq N} |\Delta X^n_s| > a) = 0,$
(ii) $\lim_n P^n(\nu^n([0,N] \times \{x : |x| > a\}) > \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0.$
b) Für alle $N > 0$ sind äquivalent:
(i) $\lim_{a\to\infty} \limsup_n P^n(\sup_{s\leq N} |\Delta X^n_s| > a) = 0.$
(ii) lim$_{a\to\infty} \limsup_n P^n(\nu^n([0,N] \times \{x : |x| > a\}) > \epsilon) = 0.$

Sei (G^n) eine Folge wachsender Prozesse, wobei jedes G^n auf $\mathcal{B}^n$ definiert sei.
B1: (G^n) konvergiert in Verteilung gegen einen deterministischen Prozess.
B2: (G^n) konvergiert in Verteilung gegen einen Prozess G, wobei jeder Pfad von G von dem selben deterministischen, wachsenden, càdlàg Prozess F stark majorisiert wird.
B3: (i) Wir haben $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (die Filtrationen können unterschiedlich sein); setze $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} = \cap_n \{\mathcal{F}^n_t\}_{t\geq 0}$;
(ii) Es existiert ein Prozess G auf Ω, so dass (G^n) nach Maß bezüglich der Skorohod-Topologie gegen G konvergiert;
(iii) Es existiert ein $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-vorhersagbarer Prozess F, welcher G stark majorisiert.
B4: Die Folge $\{\mathcal{L}(G^n)\}$ konvergiert in $\mathcal{P}(\mathbb{D}(\mathbb{R}))$ gegen einen Grenzwert P und der kanonische Prozess ξ ist vorhersagbar bezüglich der Filtration $\mathbf{D}(\mathbb{R})^P$ (Der kanonische Prozess ξ auf $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$ ist definiert durch $\xi_t(\alpha) = \alpha(t)$ für alle $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$).
B5: Auf jeder Basis $\mathcal{B}^n$ existiert ein d-dimensionaler Prozess Y^n, so dass die Folge $\{\mathcal{L}(Y^n, G^n)\}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{D}(\mathbb{R}^{d+1}))$ gegen einen Grenzwert P konvergiert. Außerdem ist die (d+1)-Komponente ξ^{d+1} des kanonischen Prozesses vorhersagbar bezüglich der Filtration $\mathbf{D}(\mathbb{R}^{d+1})^P$.

Satz 2.5 *Die Folge (X^n) ist straff, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
(i) Die Folge (X^n_0) ist straff (im $\mathbb{R}^d$);
(ii) Für alle $N > 0, \epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n P^n(\nu^n([0,N] \times \{x : |x| > a\}) > \epsilon) = 0;$$

(iii) Die Folge (B^n) ist straff;
(iv) Für alle $n, p \in \mathbb{N}^*$ existiert ein vorhersagbarer, wachsender Prozess $G^{n,p}$ auf $\mathcal{B}^n$ der $\sum_{j \leq d} \tilde{C}^{n,jj} + g_p * \nu^n$ stark majorisiert und für den gilt: Zu jedem $p \in \mathbb{N}^*$ und zu jeder Teilfolge von $(G^{n,p})_{n \geq 1}$ existiert eine Teilteilfolge, die eine der Bedingungen B1-B5 erfüllt.

Sei $\mathcal{H}^n$ für die Menge aller vorhersagbaren Prozesse H^n auf $\mathcal{B}^n$ der Form

$$H_t^n = Y_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{k} Y_i 1_{(s_i, s_{i+1}]}(t)$$

mit $k \in \mathbb{N}, 0 = s_0 < s_1 < ... < s_{k+1}$ und Y_i ist $\mathcal{F}_{s_i}$ messbar.

Definition 2.6 Eine Folge $(X^n = (X^{n,i})_{1 \leq i \leq d})_{n \in \mathbb{N}}$ von adaptierten d-dimensionalen càdlàg Prozessen heißt P-UT (predictably uniformly tight) falls für alle $t > 0$ die Familie von Zufallsvariablen $(\sum_{1 \leq i \leq d} H^{n,i} \cdot X_t^{n,i} : n \in \mathbb{N}, H^{n,i} \in \mathcal{H}^n)$ in $\mathbb{R}$ straff ist, also

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{H^{n,i} \in \mathcal{H}^n, n \in \mathbb{N}} P^n(|\sum_{i=1}^{d} H^{n,i} \cdot X_t^{n,i}| > a) = 0$$

Proposition 2.7 *Falls X^n von lokal beschränkter Variation mit Variationsprozess $Var(X^n)$, dann ist (X^n) P-UT falls $(Var(X^n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $t > 0$ straff ist.*

Proposition 2.8 *Falls (X^n) eine Folge 1-dimensionaler Semimartingale ist, die P-UT sind, sind die beiden Folgen $(\sup_{s \leq t} |X_s^n - X_0^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ und $([X^n, X^n]_t)_{n \in \mathbb{N}}$ straff für alle $t > 0$.*