

THORSTEN SCHMIDT - APRIL 2023

FINANZMATHEMATIK UND KÜNSTLICHE INTELLIGENZ

Freiburg Seminar

WAS IST ZUFALL?



EINFACHE MODELLE

- Der Würfelwurf - Werte 1,...,6 und Wahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_6
- Was kann man hier ausrechnen ?

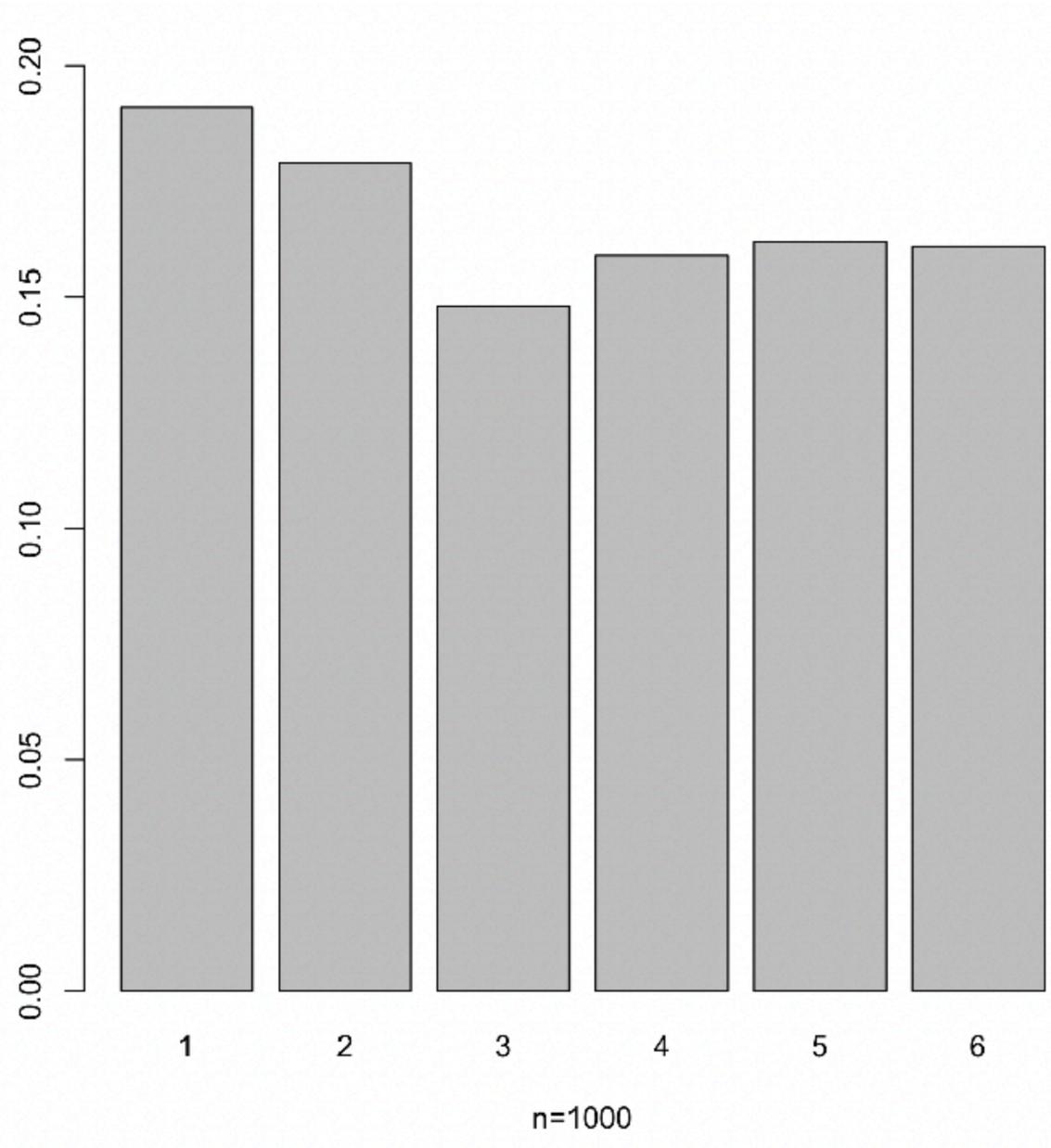
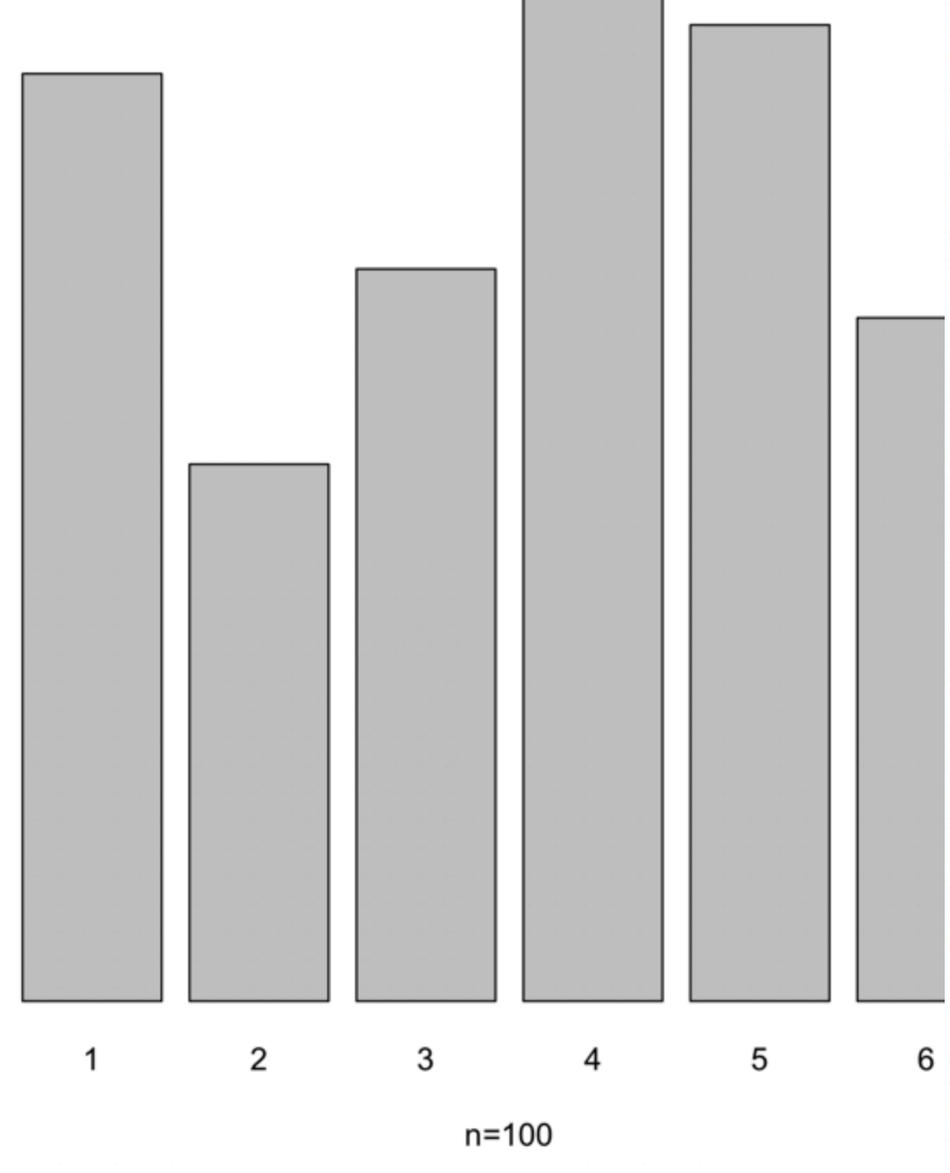
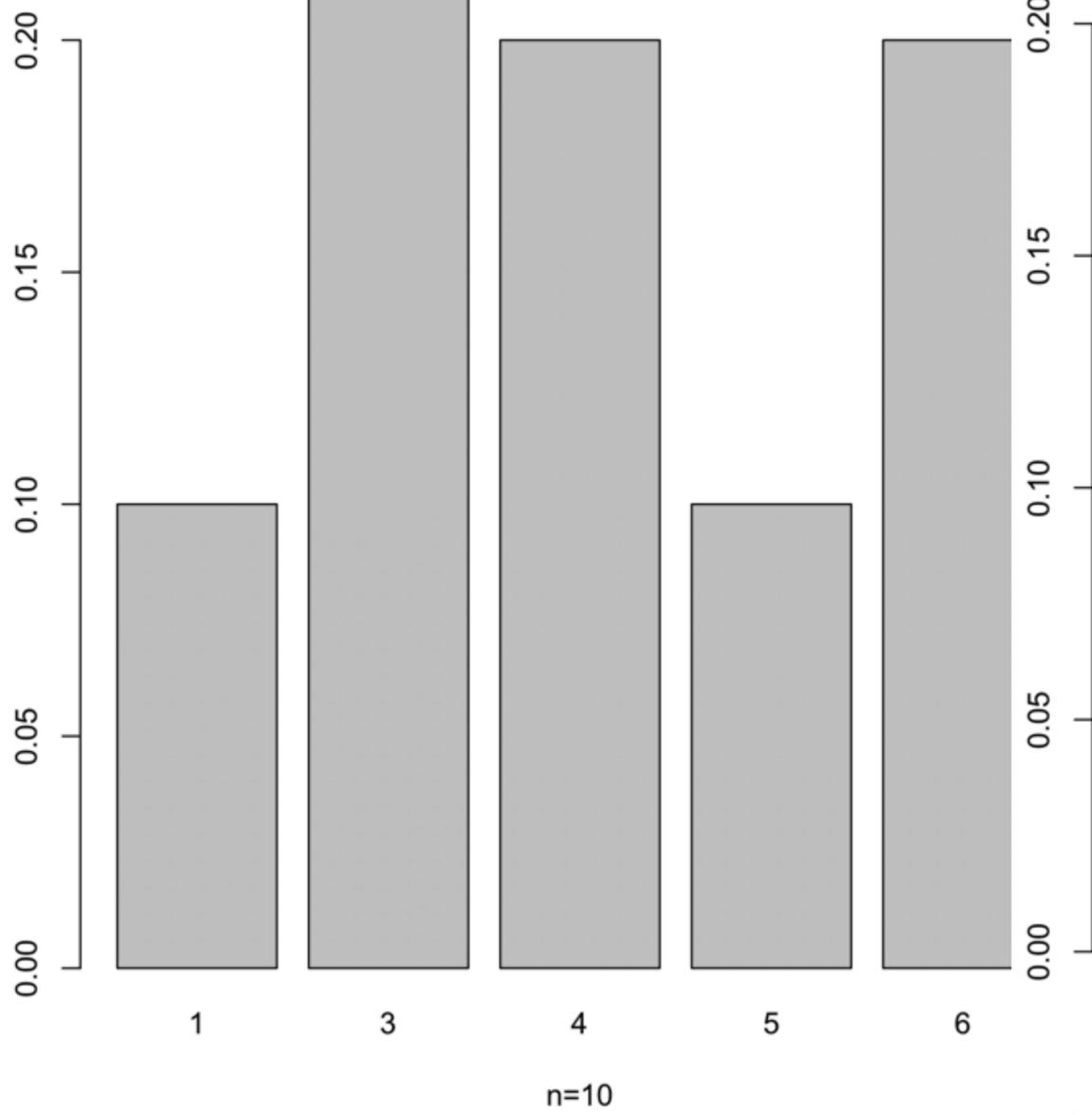
$$E[X] = 1 \cdot p_1 + \dots + 6 \cdot p_6$$

- Was kann man denn damit machen ?

THEOREM: DAS STARKE GESETZ DER GROSSEN ZAHL

- Wiederholt man ein Zufallsexperiment unabhängig
- und notiert die Ergebnisse durch X_1, X_2, \dots
- so konvergiert das arithmetische Mittel gegen den Erwartungswert

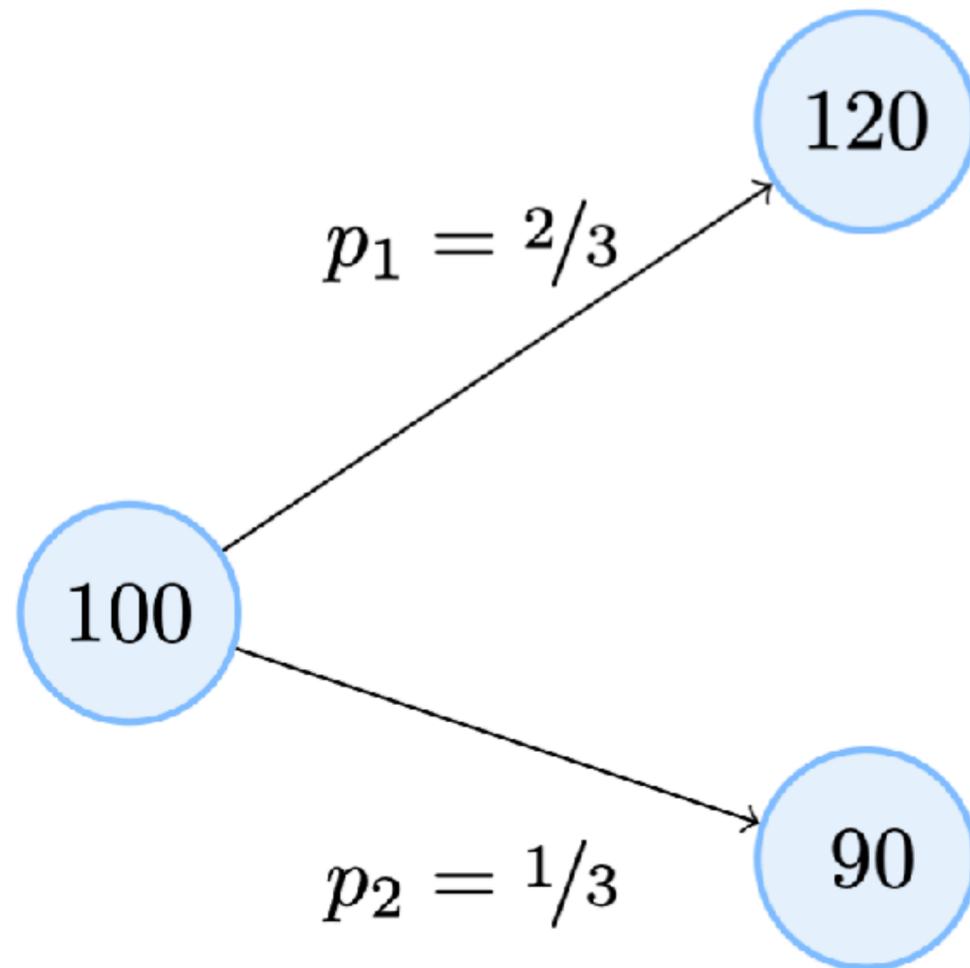
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow E[X_1]$$



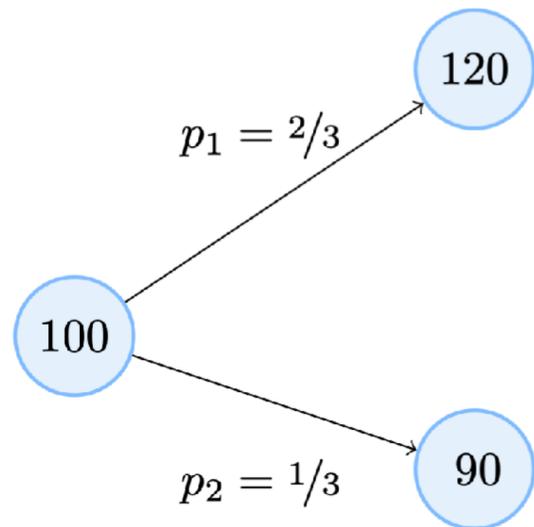
WOFÜR NUTZT MAN ZUFALL?

- Statistische Experimente
(Medizin, Physik, Soziologie,
Ökonomie, etc...)
- Optimale Strategien (Alpha Go)
- Maschine Learning (SGD)
- Uncertainty
- **Hier:** Modellierung von
Aktienkursen

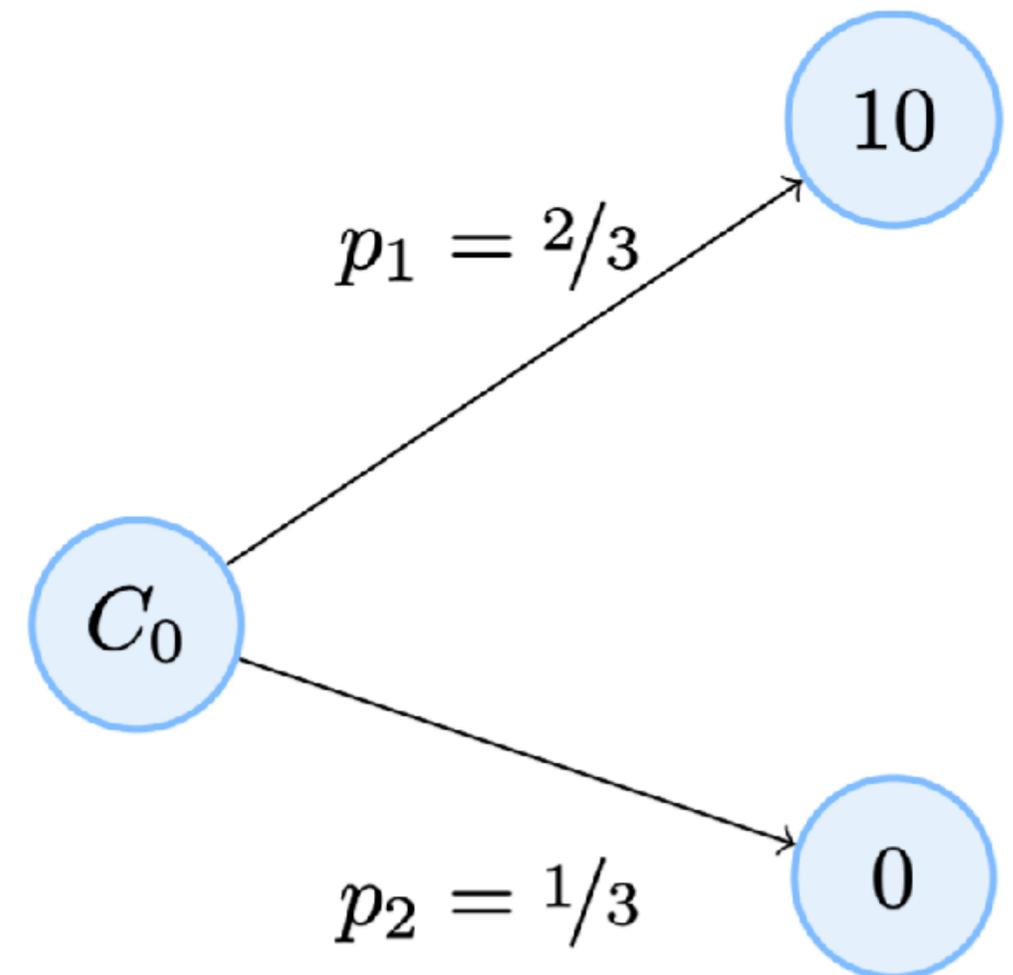
EIN EINFACHES MODELL FÜR EINE AKTIE



NUN GIBT ES NOCH ANDERE PRODUKTE - CALLS UND PUTS



- Um eine Position abzusichern nutzt man Derivate
- Calls sind die Option eine Aktie zu kaufen
- Puts sind die Option eine Aktie
- Wir betrachten einen Call mit $K=110$
- Als bekommen wir 10 (oben) oder 0 (unten)
- Was ist der Preis dieses Calls?



SIE BIETEN DEN CALL FÜR 6,66 EUR AN...

- Was nun ?

IHRE AUFGABE

- Die Call Option C mit Strike 110 besitzt folgendes Auszahlungsprofil (S =Stock ist die Aktie)

$$C = \begin{cases} 10 & \text{falls } S = 120, \\ 0 & \text{falls } S = 90. \end{cases}$$

- Finden Sie einen Betrag x , welchen Sie bei ihrer Bank leihen müssen, und die Anzahl von Aktien y , die Sie besitzen müssen, um die Call Option zu replizieren, d.h. finden Sie x und y derart, dass

$$x + yS = \begin{cases} 10 & \text{falls } S = 120, \\ 0 & \text{falls } S = 90. \end{cases}$$

- Tipp: Sie erhalten durch einsetzen beider Werte in S ein lineares Gleichungssystem für x und y , welches zu einer eindeutigen Lösung führt.

LÖSUNG

Das lineare Gleichungssystem ist gegeben durch

$$x + 120y = 10$$

$$x + 90y = 0$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten

$$30y = 10 \Rightarrow y = 1/3.$$

Setzen wir nun y in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$x + 40 = 10 \Rightarrow x = -30.$$

Die Lösung ist somit $(x,y)=(-30,1/3)$.

INTERPRETATION IHRER LÖSUNG

Die gefundene Lösung $(x,y)=(-30,1/3)$ lässt sich nun wie folgt interpretieren:

Zeitpunkt 0

Sie haben 30€ Schulden bei ihrer Bank und besitzen $1/3$ der Aktie im Wert von $100/3=33,33€$. Ihr aktuelles Vermögen beträgt somit $-30€+33,33€=3,33€$.

Zeitpunkt 1

Sie haben immer noch 30€ Schulden bei ihrer Bank und besitzen $1/3$ der Aktie.

Der Wert der Aktie hat sich aber geändert. Für den Wert ihres aktuellen Vermögens gibt es zwei Szenarien

$$-30 + \frac{1}{3}S = \begin{cases} 10 & \text{falls } S = 120, \\ 0 & \text{falls } S = 90. \end{cases}$$

Sie haben mit einem Startkapital von 3,33€ zum Zeitpunkt 0 die Auszahlung der Call Option repliziert. Der richtige Preis zum Zeitpunkt 0 für diese Option beträgt damit 3,33€.

UND WAS SAGT CHATGPT DAZU ?

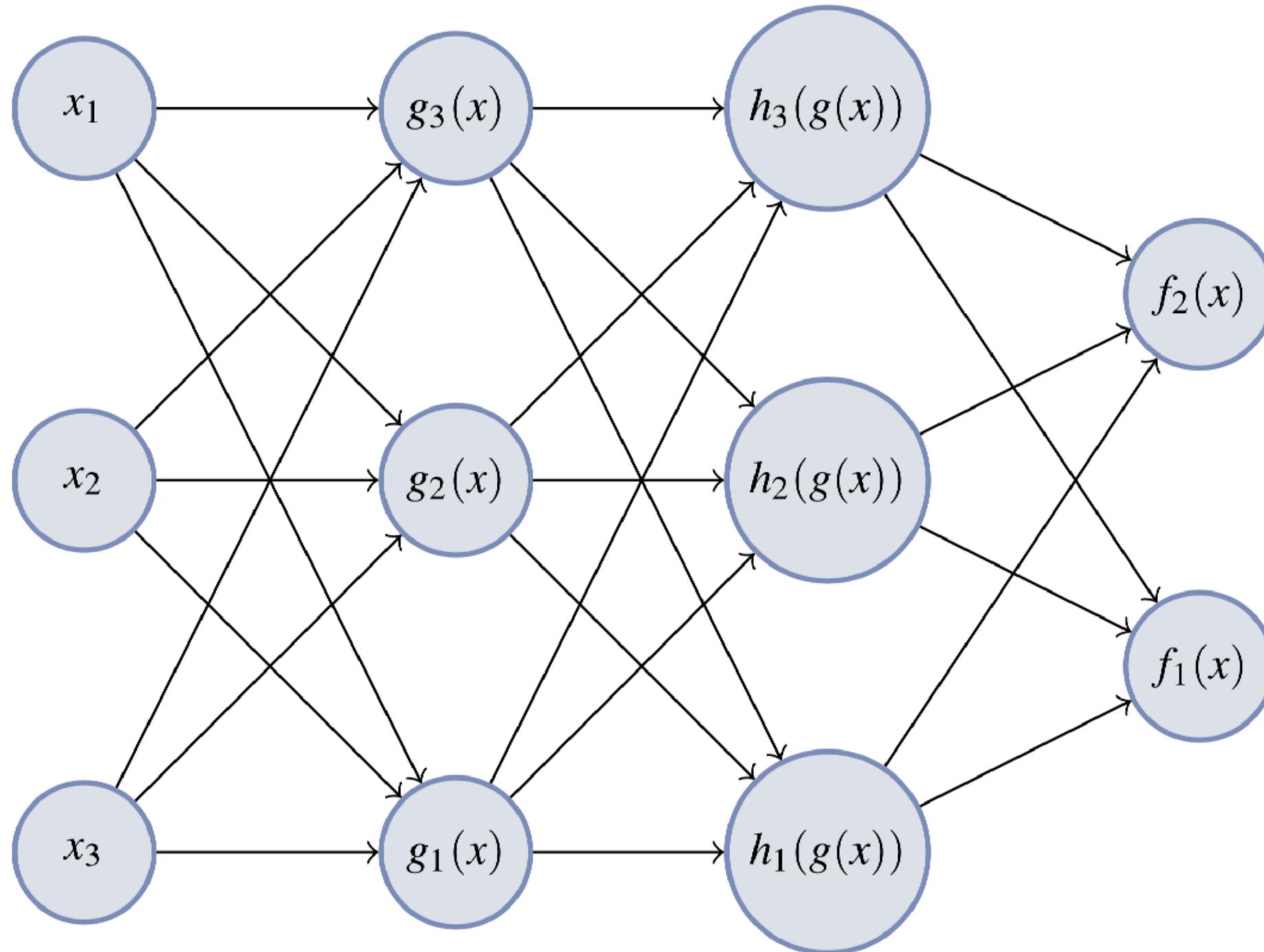
- Leider ist die Ausführung von ChatGPT zu der Fragestellung zwar sehr nett zu lesen, aber komplett falsch
- Auch sonst gibt es viele gute Vorschläge - aber mit vielen Fehlern. Also: Vorsicht !
- **Sollte KI reguliert werden ?
Wenn ja - wie ?**

MACHINE LEARNING UND KI



Ada Lovelace 1836, Gemälde von Margaret Sarah Carpenter (1793–1872)

WAS IST DENN EIN NEURONALES NETZ?



UNIVERSAL APPROXIMATION THEOREM

- Neuronale Netze haben (selbst mit nur einem Layer) die universelle Approximationseigenschaft:
- Sie können jede beliebige Funktion beliebig nahe approximieren
- Wir können also alle möglichen Funktionen durch neuronale Netze lernen
- Was brauchen wir dafür ?
- Eine Zielfunktion
- Eine Optimierungsmethode

EIN BEISPIEL

- Wir lernen Ziffern zu lesen
- https://colab.research.google.com/drive/1Y4Uf2nGIbm8f3xL4uN8cx_5Oc_2HeyZ?usp=sharing

Videos

Hier sammeln wir Videos aus der Arbeitsgruppe

[Künstliche Intelligenz und Machine Learning](#) [↗](#) (YouTube, von Thorsten Schmidt)

Deep Learning ist in aller Mund und in der Tat eine erstaunliche Technik mit der man u
das auch noch mit wenigen Zeilen Code !

- Was sind die Grundlagen und Hintergründe von maschinellem Lernen ?
- Wie kann man einem Computer beibringen handgeschriebenen Ziffern besser zu erkennen
hat das auch noch mit Mathematik zu tun ?

Dieses Video gibt einen kurzen Einblick in künstliche Intelligenz und versucht ein bisschen
spannenden Technologie zu schauen.

Der Code ist auf [Google Colab](#) [↗](#) verfügbar.

► Zum Kommentieren müssen Sie sich anmelden



+ Code + Text

```
ax.imshow(train_images_orig[1], cmap=plt.cm.binary)
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])
for sp in ax.spines.values():
    sp.set_visible(False)
```

```
plt.subplots_adjust(bottom=0, right=0.4, top=0.2)
plt.show()
```

5 0 4 1 9 2 1 3 1 4 3 5 3 6 1 7 2 8
 4 0 9 1 1 2 4 3 2 7 3 8 6 9 0 5 6 0
 1 8 7 9 3 9 8 5 3 3 3 0 7 4 9 8 0 9
 4 4 6 0 4 5 6 7 0 0 1 7 1 6 3 0 2 1
 8 0 2 6 7 8 3 9 0 4 6 7 4 6 8 0 7 8
 5 7 1 7 1 1 6 3 0 2 9 3 1 1 0 4 9 2
 2 0 2 7 1 8 6 4 1 6 3 4 3 9 1 3 3 8
 7 7 4 2 8 5 8 6 7 3 4 6 1 9 9 6 0 3
 8 2 9 4 4 6 4 9 7 0 9 2 9 5 1 5 9 1
 2 3 5 9 1 7 6 2 8 2 2 5 0 7 4 9 7 8
 1 1 8 3 6 1 0 3 1 0 0 1 1 2 7 3 0 4
 2 6 4 7 1 8 9 9 3 0 7 1 0 2 0 3 5 4
 8 6 3 7 5 8 0 9 1 0 3 1 2 2 3 3 6 4
 0 6 2 7 9 8 5 9 2 1 1 4 4 5 6 4 1 2
 9 3 9 0 5 9 6 5 7 4 1 3 4 0 4 8 0 4
 8 7 6 0 9 7 5 7 2 1 1 6 8 9 4 1 5 2
 0 3 9 6 7 2 0 3 5 4 3 6 5 8 9 5 4 7 4 2
 1 3 4 8 9 1 9 2 8 7 9 1 8 7 4 1 3 1 1 0
 2 3 9 4 9 2 1 6 8 4 7 7 4 4 9 2 5 7 2 4
 4 2 1 9 7 2 8 7 6 9 2 2 3 8 1 6 5 1 1 0

```
ax.set_yticks([])
for sp in ax.spines.values():
    sp.set_visible(False)
```

```
plt.subplots_adjust(bottom=0, right=0.4, top=0.2)
plt.show()
```

Very clear that this can be improved !

2 9 4 6 3 6 8 3 2 1 1 7 8 5 9 5 1 6 0 1
 4 7 6 7 4 4 9 1 3 5 8 7 7 8 7 7 8 3 4 2
 3 3 7 3 0 7 2 3 4 3 7 5 2 0 8 7 7 0 5 4
 7 0 3 0 6 1 2 7 5 1 8 3 0 5 9 9 2 7 3 7
 3 9 6 9 7 5 3 9 3 3 2 5 7 0 3 9 6 0 8 6
 7 7 2 7 0 7 6 4 5 5 1 4 3 7 4 9 1 0 9 8
 9 2 1 9 2 2 9 4 3 3 2 5 4 8 2 3 3 4 8 6
 4 7 0 7 4 7 3 2 3 7 1 1 1 9 3 1 4 3 7 7
 7 4 3 8 3 9 3 3 3 3 3 9 3 8 7 2 7 7 0 5
 0 9 1 6 0 8 3 3 2 1 1 1 1 5 2 6 3 3 6 8
 8 9 8 9 7 7 7 7 9 0 6 2 6 4 5 2 5 9 7 5

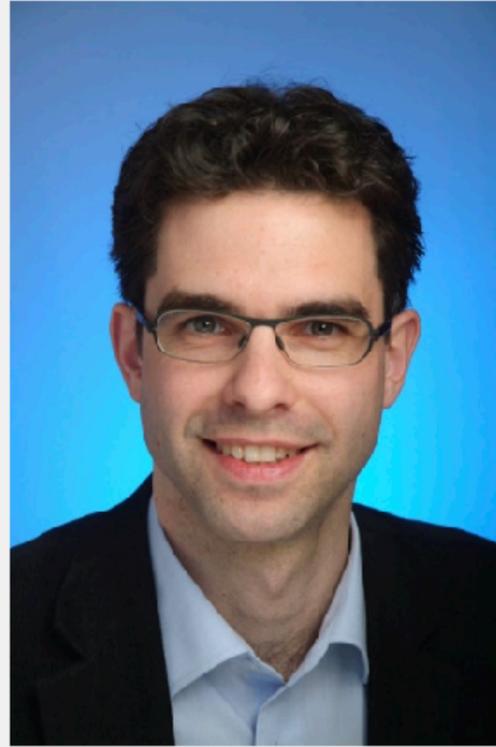
WIESO SOLLTE MAN MATHEMATIK STUDIEREN ?

UND WIESO IN FREIBURG ?



JProf. Dr. David Criens

- Stochastische Analysis
- Diffusionen und SDEs
- Interagierende Teilchensysteme
- Irrfahrten in zufälliger Umgebung
- Martingalprobleme
- Nichtlineare stochastische Prozesse und nichtlinear Halbgruppen
- (Semilineare) stochastische PDEs



Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber

- Stochastische Modelle in den Lebenswissenschaften
- Populationsgenetik
- Chemische Reaktionsnetzwerke
- Markov-Prozesse



Prof. Dr. Angelika Rohde

- Mathematische Statistik Adaptive Inferenz (unter Restriktionen), nichtparametrische Statistik stochastischer Prozesse, Transfer Learning
- Wahrscheinlichkeitstheorie Grenzwertsätze und asymptotische Entwicklungen, Zufallsmatrizen, empirische Prozesse und concentration of measure



Prof. Dr. Thorsten Schmidt

- Finanzmathematik
- Kreditrisiken
- Pricing und Hedging von derivativen Finanzprodukten
- Statistik von stochastischen Prozessen
- Energiemärkte
- Nichtlineare Filtertheorie
- Statistische Anwendungen
- Maschinelles Lernen