Uniforme zentrale Grenzwertsätze für stochastische Prozesse (Uniform central limit theorems for stochastic processes)

Seminar — *Angelika Rohde*

Blockseminar im Schwarzwald
Vorbesprechung: **Do 25.01.2024**, 10:00 Uhr, Raum 232

Inhalt:

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und sei $P_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}$ die zugehörige empirische Verteilung. Das starke Gesetz der großen Zahlen zeigt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ fast sicher $F_n(x) := P_n((-\infty, x]) \to F(x)$. Eine Verschärfung von Glivenko-Cantelli besagt, dass diese Konvergenz fast sicher sogar gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wie beim klassischen zentralen Grenzwertsatz ist der nächste Schritt, die Verteilungskonvergenz von $\alpha_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ zu untersuchen. Die Funktion $x \mapsto \alpha_n(x)$ kann als stochastischer Prozess mit càdlàg-Pfaden aufgefasst werden. Ein Satz von Donsker hat die Verteilungskonvergenz von α_n gegen einen Gaußprozess zum Gegenstand. Die anschließende Frage von Doob, ob die Indexmenge der reellen Zahlen (bzw. die der Indikatorfunktionen der Halbstrahlen $(-\infty, x]$) durch eine allgemeine Funktionenklasse ersetzt werden kann, war der Startschuss für die tiefgreifende Theorie der „uniformen zentralen Grenzwertsätze“.

Uniforme zentrale Grenzwertsätze stellen eine substantielle Erweiterung der klassischen Donsker-Sätze dar, verbunden mit einer Theorie der Verteilungskonvergenz, die weit über die der càdlàg-Prozesse hinausgeht. Studiert werden hier ganz allgemein Prozesse, die in abstrakten Funktionenklassen indiziert sind. Zahlreiche Anwendungen dieser Resultate finden sich bspw. in der Unsicherheitsquantifikation von Lernalgorithmen. Nach den zentralen Resultaten wie dem Satz über majorisierende Maße für Gaußprozesse von Fernique-Talagrand, der Vapnik-Červonenkis-Kombinatorik sowie Ossianders Bracketing-CLT lösen wir uns in diesem Seminar von dem klassischen Rahmen unabhängiger Zufallsgrößen und erarbeiten solche Sätze für zeitstetige stochastische Prozesse wie bspw. rekurrente Markovprozesse oder unter dem Konzept der sogenannten schwachen Abhängigkeit.

Erforderliche Vorkenntnisse:

notwendig: Wahrscheinlichkeitstheorie
nützlich: Wahrscheinlichkeitstheorie II

Bemerkungen:

Bei Interesse und vorhandenen Vorkenntnissen kann ein Seminar auch als Proseminar eingesetzt werden.
Es besteht die Möglichkeit, unmittelbar eine Abschlussarbeit anzuschließen.

Verwendbarkeit:

Studiengang:	Bachelor of Science (PO 2012, PO 2021)
Modul:	**Mathematisches Seminar** (6 ECTS) – nur PO 2021
Modul:	**Wahlpflichtmodul Mathematik** (6 ECTS)
Teil des Moduls:	**Bachelormodul** (15 ECTS) – nur PO 2012
Studiengang:	Master of Science (PO 2014)
Modul:	**Mathematisches Seminar A/B** (6 ECTS)
Studiengang:	Master of Education (PO 2018)
Modul:	**Mathematische Ergänzung** (3 ECTS)
Studiengänge:	Master of Science (PO 2014) Zwei-Hauptfächer-Bachelor – Option „Individuelle Studiengestaltung“
Modul:	**Wahlmodul** (6 ECTS)
Bemerkungen:	Je nach Schwere des Vortragsthemas kann der Aufwand für die Veranstaltung höher als die Anzahl der ECTS-Punkte des Moduls „Mathematische Ergänzung“ sein.