Wahrscheinlichkeitstheorie III

Wintersemester 2024/25

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 13.12.2024.

Aufgabe 1 (Komlós Lemma für L^0; 6 Punkte)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

i) Es existieren $g_n \in \langle f_n, f_{n+1}, \dots\rangle_{\text{conv}}$, sodass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable g mit Werten in $[0,\infty]$ konvergiert.

ii) Es gilt $P[g < \infty] = 1$, falls $\langle f_n, f_{n+1}, \dots\rangle_{\text{conv}}$ in L^0 beschränkt ist.

   Hinweis: Eine Familie $F \subset L^0$ heißt beschränkt*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $P[|X| \geq C] < \varepsilon \quad$ für alle $X \in F$.*

iii) Es gilt $P[g > 0] > 0$, falls ein $\alpha > 0$ existiert, sodass $P[f_n \geq \alpha] \geq \alpha > 0$.

Hinweis:

i) Das Resultat folgt, falls es eine Folge $g_n \in \langle f_n, f_{n+1}, \dots\rangle_{\text{conv}}$ gibt, sodass e^{-g_n} in L^1 konvergiert. Definieren Sie

$$J_n := \inf\{E[e^{-g}] | g \in \langle f_n, f_{n+1}, \dots\rangle_{\text{conv}}\}.$$

   Setzen Sie

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 | |x-y| \leq \varepsilon\},\\ B_\varepsilon &= \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 | x \wedge y \geq 1/\varepsilon\},\\ C_\varepsilon &= \mathbb{R}_+^2 \backslash (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon). \end{aligned}$$

   Für $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ existiert für jedes ε ein δ, sodass

$$e^{-(x+y)/2} \leq \left(\frac{e^{-x} + e^{-y}}{2}\right) - \delta \mathbb{1}_{C_\varepsilon}(x,y).$$

iii) Zeigen Sie, dass $g_n = \sum_{n \leq k \leq N} \lambda_k f_k \in \langle f_n, f_{n+1}, \dots\rangle_{\text{conv}}$ die Ungleichung

$$E[e^{-g_n}] \leq (1-\alpha) + e^{-\alpha}$$

   erfüllt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie: (NFLVR) $\Rightarrow$ (NUPBR) + (NA).

Hinweis: Zeigen Sie das Resultat durch Kontraposition und verwenden Sie Problem 1 sowie den Satz von Egorov.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie: (NUPBR) + (NA) $\Rightarrow$ (NFLVR).

Hinweis: Verwenden Sie die Kontraposition und Problem 1.