Was ist lineare Algebra?

In vielen Bereichen der Mathematik beschäftigt man sich mit dem Lösen von Gleichungssystemen. Dabei möchte man entweder Lösungen explizit finden (am besten sogar alle existierenden Lösungen), oder zumindest die Menge aller Lösungen geometrisch gut verstehen.
Die *lineare Algebra* befasst sich nun mit den einfachsten Arten von Gleichungssystemen, den sogenannten *linearen Gleichungssystemen* (kurz LGS). Diese kennen Sie vermutlich schon aus der Schule, so ist etwa durch

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{1}$$

ein lineares Gleichungssystem gegeben. Eine mögliche Lösung hiervon ist durch $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ gegeben (rechnen Sie dies gerne nach!) und es stellt sich sofort die Frage, ob es noch weitere Lösungen gibt (vielleicht können Sie diese Frage schon mit Verfahren aus der Schule beantworten?). Im Lauf der Zeit hat die Mathematik Methoden entwickelt, um diese und fast alle weiteren Fragen in Bezug auf lineare Gleichungssysteme zu beantworten. Da diese sowohl in der Mathematik selbst als auch in zahlreichen anderen Wissenschaften sehr häufig auftreten, zählt die lineare Algebra zu den wichtigsten theoretischen Grundlagen in vielen Gebieten von Naturwissenschaft und Technik.

Geometrie der Lösung

Vielleicht wissen Sie bereits aus dem Schulunterricht, dass lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Dass dies nicht selbstverständlich ist, zeigt die nicht-lineare Gleichung $x^2 = 1$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Demgegenüber gibt es keine linearen Gleichungssysteme mit genau zwei Lösungen. Wir haben hier also ein Phänomen, welches von der *linearen Struktur* des Problems abhängt und es ist eines der vielen Ziele der Vorlesung diesen Zusammenhang tiefer zu verstehen. Dabei werden Sie lernen, dass die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen eine geometrisch sehr einfache Struktur besitzt, nämlich die eines *(affinen) Vektorraums*. Eine Konsequenz davon ist, dass die Lösungsmenge durch endlich viele Datenpunkte beschrieben werden kann - die minimale Anzahl der dazu notwendigen Datenpunkte werden Sie als *Dimension* der Lösung bzw. des Vektorraums kennenlernen. Auch das kennen Sie bereits: So ist ein eindimensionaler affiner Vektorraum eine Gerade, welche (bis auf Verschiebung im Raum) durch ihren Richtungsvektor beschrieben werden kann. Ein zweidimensionaler affiner Vektorraum hingegen ist eine Ebene, diesmal beschrieben durch zwei Richtungsvektoren, die diese aufspannen. Dies ist mit *Geometrie der Lösung* gemeint. Als Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen kommen also nur ein einzelner Punkt, Geraden, Ebenen oder sogenannte Hyperebenen (das sind höherdimensionale Verallgemeinerungen von Ebenen) vor. Geometrisch nicht mögliche Lösungsformen sind etwa Kreise - diese treten zwar als Lösungsmenge von

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

auf, diese Gleichung ist aber wieder nicht-linear, da die Variablen x_1 und x_2 als höhere Potenzen vorkommen (überlegen Sie sich gerne, dass die Lösungsmenge tatsächlich ein Kreis ist!).

Matrixschreibweise

Mathematiker neigen dazu, Dinge möglichst einfach halten zu wollen und keine unnötige Information in die Problembeschreibung aufzunehmen. Das passt zugegebenermaßen nicht ganz zu den Ihnen wohlvertrauten Textaufgaben aus dem Schulunterricht, gerade hier wird jedoch gelernt, Aufgaben auf ihren wesentlichen Inhalt zu reduzieren, um anschließend ein entwickeltes Rechenverfahren darauf anwenden zu können.
Betrachten wir nun die Gleichung (1), so stellen wir fest, dass es im Prinzip keine Rolle spielt, dass die unbekannten Variablen x_1, x_2, x_3 gerade x_1, x_2 und x_3 heißen. Wir hätten sie auch y_1, y_2 und y_3 nennen können. Anders gesagt, wird die gesamte Information von Gleichung (1) bereits durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Ein Objekt wie A nennt man *Matrix* oder genauer 3×3-*Matrix*, b ist ein sogenannter *Vektor*. Bezeichnet x einen weiteren Vektor mit Einträgen x_1, x_2 und x_3, so können wir das lineare Gleichungssystem (1) kurz als

$$Ax = b$$

schreiben. Dies dient als Kurzschreibweise für

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(Überlegen Sie einmal, wie die 'Multiplikation' Ax definiert sein muss, damit Sie wirklich das LGS (1) erhalten!). All dies lernen Sie noch im Detail im Verlauf des Semesters.

Finden von Lösungen

Eine der vielen schönen Eigenschaften von lineare Gleichungssystemen ist, dass Verfahren existieren, mit denen sie explizit gelöst werden können. Sie kennen womöglich bereits den *Gauß-Algorthmus* aus der Schule, andernfalls lernen Sie diesen im Lauf des Semesters kennen. Sie können dann zu vorgegebener Matrix A und Lösung b das LGS (1) in wenigen Schritten mit Stift und Papier lösen (zugegebenermaßen werden Sie ab einer gewissen Dimension den Computer vorziehen). Auch hier werden Sie noch sehen, dass dies eine nicht-selbstverständliche Eigenschaft von linearen Gleichungen ist. Zwar haben auch andere Formen von Gleichungen eine 'Lösungsformel', etwa quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, man kann jedoch beweisen, dass eine solche nicht mehr existiert, für Gleichungen vom Grad fünf, also

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Dies wird einmal Gegenstand der Vorlesung *Algebra und Zahlentheorie* sein, denn wie Sie sicher bereits bemerkt haben, ist die Gleichung wieder nicht-linear, ihre Untersuchung gehört also nicht in die *lineare* Algebra.

Ist die Lösung eindeutig?

Wir haben bereits ganz zu Beginn die Frage aufgeworfen, ob das LGS (1) eine *eindeutige* Lösung besitzt. Wie sieht man das? Eine Möglichkeit ist es natürlich loszurechnen und am Ende des Gauß-Algorithmus erkennt man dann, ob es nur eine, oder mehrere Lösungen gibt. Zusätzlich können wir uns aber die strukturelle Frage stellen, von was das abhängt: Gibt es also eine Möglichkeit, bereits an der Matrix A der Koeffizienten abzulesen, ob (1) eine eindeutige Lösung besitzt? Die Antwort ist ja und wird im Lauf der Vorlesung zu den Begriffen *Rang*, *Determinante* und *lineare Unabhängigkeit* führen und ein fundamental tieferes Verständnis von linearen Gleichungssystemen ermöglichen, aber auch ganz neue Fragen aufwerfen.

Und weiter?

Zusammengefasst haben wir in diesem kurzen Abschnitt gesehen, was die wesentliche Information eines linearen Gleichungssystems ist, wir haben gelernt, dass Verfahren zur Lösungsfindung existieren, dass man an der Koeffizientenmatrix A ablesen kann, ob die Lösung eindeutig ist und gesehen, dass sich die Lösungsmenge durch eine geometrische Struktur, die sogenannten affinen Vektorräume beschreiben lässt. Bei der systematischen Analyse dieser Themen, werden Sie in der Vorlesung immer wieder auf neue Begriffe und Konzepte stoßen, die wiederum Anlass für neue Fragen sind. Insofern dienen die obigen Themen lediglich als Auswahl und bilden den Anknüpfungspunkt an den Schulstoff. Die Bandbreite der behandelten Themen geht natürlich noch tiefer:

- Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass wir nach reellen Lösungen von (1) suchen. Was ändert sich, wenn wir nur rationale Lösungen oder gar ganze Zahlen zulassen? Können wir auch hier entscheiden, ob Lösungen existieren und eindeutig sind?

- Gibt es noch weitere *Zahlen* neben den reellen, rationalen und ganzen, die im letzten Punkt angesprochen wurden? Was für eine *algebraische Struktur* müssen diese haben um als Lösung in Frage zu kommen? So muss man unterscheiden, *wie* man mit welchen Zahlen rechnen darf: So gibt es beispielsweise für jeden Bruch q einen weiteren Bruch q^{-1} sodass $qq^{-1} = 1$ gilt (man spricht von multiplikativen Inversen). Für ganze Zahlen existieren diese jedoch nicht, denn so ist zwar $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, aber $\frac{1}{2}$ ist keine ganze Zahl.

- Eng verwandt mit den linearen Gleichungssystemen sind die sogenannten *linearen Abbildungen* zwischen Vektorräumen. Dies sind höherdimensionale Verallgemeinerungen der wohlbekannten Geradengleichung $f(x) = ax + b$ für reelle Zahlen a, b und x. Sie werden lernen, was diese sind, wie sie mit Matrizen zusammenhängen und natürlich eine ganze Reihe von Eigenschaften untersuchen.

- Oben bereits angesprochen wurde der Begriff der Dimension. Wir haben sie vereinfacht eingeführt als die minimale Menge an Datenpunkten, die wir benötigen, um ein Objekt eines Vektorraums zu beschreiben. Das deckt sich mit ihrem bisherigen Dimensionsbegriff: So ist der $\mathbb{R}^3$ dreidimensional, da man jeden Punkt durch seine x-, y- und z-Koordinate eindeutig beschreiben kann. Auch diesen Begriff werden wir näher studieren: So kann man sich beispielsweise fragen, inwiefern sich verschiedene dreidimensionale Räume eigentlich unterscheiden?