# Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

## Blatt 11

**Abgabetermin:** Donnerstag, 18.01.2024, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $r \geq 2$ und $U_1, \ldots, U_r \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass

$$U_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j = \{0\} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, r$$

genau dann gilt, wenn

$$U_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} U_j = \{0\} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, r.$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $M(n \times n; K)$ der Raum der Matrizen über $K$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(n, K) &:= \left\{ A \in M(n \times n; K) \mid A^t = A \right\}, \\ \mathrm{Alt}(n, K) &:= \left\{ A \in M(n \times n; K) \mid A^t = -A \right\}. \end{aligned}$$

Matrizen in $\mathrm{Sym}(n, K)$ werden *symmetrisch* genannt und Matrizen in $\mathrm{Alt}(n, K)$ als *schiefsymmetrisch* oder *alternierend* bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ Untervektorräume von $M(n \times n; \mathbb{R})$ sind und geben Sie jeweils die Dimension und eine Basis an.

(b) Zeigen Sie, dass $M(n \times n; \mathbb{R}) = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Es sei $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n$ eine Kette von Untervektorräumen eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie, dass es Komplemente $U_i'$ zu $U_i$ gibt (d.h. $V = U_i \oplus U_i'$) für $i = 1, \ldots, n$ mit $U_1' \supset U_2' \supset \cdots \supset U_n'$.

(bitte wenden)

**Aufgabe 4** (4 + 2* Punkte)

In dieser Aufgabe können zwei Bonuspunkte erreicht werden. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen $K$-linear sind:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y, z) = (x - 2y, 6y - 3x)$ für $K = \mathbb{R}$.

(b) $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = \overline{z}$ für $K = \mathbb{C}$ (für die Definition von $\overline{z}$ vgl. Blatt 6, Aufgabe 1).

(c) Die Abbildung $g$ aus Teil (b), diesmal jedoch für $K = \mathbb{R}$.

(d) $h : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ mit $h(x, y) = (2y, x^2 + 2xy + y^2)$ für $K = \mathbb{Q}$.

(e) $F : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(f) = f(1)$ für $K = \mathbb{R}$.

(f) $G : (F_3)^2 \longrightarrow (F_3)^3$ mit $G(x, y) = (2x + y, y - x^3, x + 2y)$ für $K = F_3$.

**Aufgaben zur Selbstkontrolle**

(i) Es seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume mit $\dim_K(U_1) = n$ und $\dim_K(U_2) = m$. Welche $K$-Dimension hat $U_1 \oplus U_2$?

(ii) Was versteht man unter dem *Komplement* eines Untervektorraums $U \subset V$? Existiert ein solches immer? Ist das Komplement eindeutig?

(iii) Definieren Sie die direkte Summe $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ von Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_n \subset V$.

(iv) Definieren Sie den Begriff *lineare Abbildung*.

(v) Zwischen welchen Räumen und auf welche Weise induziert eine Matrix $A \in M(n \times m; K)$ eine lineare Abbildung?

(vi) Im Setup von (v): Wie hängt die Matrixmultiplikation mit der Verkettung der induzierten linearen Abbildungen zusammen?