Übungen zur Vorlesung
"Lineare Algebra I"

Blatt 8

Abgabetermin: Donnerstag, 14.12.2023, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Basen des K-Vektorraums K^n.

(b) Bestimmen Sie für jedes $k \leq n$ die Anzahl k-dimensionaler Untervektorräumen von K^n.

(c) Folgern Sie, dass es genauso viele $(n-1)$-dimensionale Unterräume wie 1-dimensionale Unterräume des K^n gibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $M_1, M_2 \subset V$ Teilmengen.

(a) Zeigen Sie, dass $Lin(M_1 \cap M_2) \subset Lin(M_1) \cap Lin(M_2)$.

(b) Finden Sie ein Beispiel, in welchem in Teil (a) Gleichheit der Mengen gilt und eines, bei dem es sich um eine strikte Inklusion handelt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Wir definieren

$$h(V) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt eine Kette } U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset U_n \text{ von Untervektorräumen mit } U_i \neq U_{i+1} \text{ für alle } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Zeigen Sie, dass $h(V) = dim(V)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $K[t]$ der Polynomring über K. Mit der Addition von Polynomen und skalarer Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_0 + a_1 t + \ldots, a_n t^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \cdots + (\lambda a_n)t^n$$

für $\lambda \in K$ wird $K[t]$ zu einem K-Vektorraum (sie brauchen dies nicht nachrechnen). Es sei weiter $K[t]_n := \{P \in K[t] \mid deg(P) \leq n\} \cup \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $K[t]_n$ ein Untervektorraum von $K[t]$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $K[t]_n$ und geben Sie eine Basis an.

(c) Ergänzen Sie die Familie $(t^3 + 1, t^4 + 2t)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}[t]_4$.

(d) Analog zur Aufgabenstellung kann $\mathbb{C}[t]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{C}[t]_n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und geben Sie eine Basis an.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Ist jedes unverkürzbare Erzeugendensystem eine Basis?

(ii) Was besagt der *Basisauswahlsatz*?

(iii) Was besagt der *Basisaustauschsatz*?

(iv) Haben alle Basen eines endlich erzeugten K-Vektorraums die gleiche Länge?

(v) Welche Dimension hat $Lin((1, 2, 3), (11, 12, 13))$ als Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$?