# Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

## Blatt 4

**Abgabetermin:** Donnerstag, 16.11.2023, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $G' \subset G$ eine nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie, dass $(G', *)$ genau dann eine Untergruppe von $(G, *)$ ist, wenn für beliebige $a, b \in G'$ auch $a * b \in G'$ und $a' \in G'$ (wobei $a'$ als das Inverse von $a$ in $(G, *)$ zu verstehen ist).

(b) Es seien $(G_1, *)$ und $(G_2, *)$ Untergruppen von $(G, *)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall auch $(G_1 \cap G_2, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$ ist.

(c) Unter den Voraussetzungen von (b) gelte weder $G_1 \subset G_2$ noch $G_2 \subset G_1$. Zeigen Sie, dass dann $(G_1 \cup G_2, *)$ keine Untergruppe von $(G, *)$ bildet.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 2.22:

(a) Für $a, b \in F_m$ gilt

$$r_m(a+b) = r_m(r_m(a)+b) = r_m(a+r_m(b)) = r_m(r_m(a)+r_m(b))$$

und

$$r_m(a \cdot b) = r_m(r_m(a) \cdot b) = r_m(a \cdot r_m(b)) = r_m(r_m(a) \cdot r_m(b)).$$

(b) $(F_m, +_m, \cdot_m)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

(c) Auf $\mathbb{Z}/\sim_m$ seien Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$[a] + [b] = [a +_m b] \quad \text{und} \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot_m b]$$

(vgl. Bemerkung 2.29). Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, sowie $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass eindeutige Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$a = qm + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < m.$$

(bitte wenden)

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Es seien $(K, +, \cdot)$ und $(L, \oplus, \odot)$ Körper. Eine Abbildung $\phi : K \to L$ heißt *Körperhomomorphismus*, wenn $\phi(1_K) = 1_L$, sowie für alle $a, b \in K$

$$\phi(a + b) = \phi(a) \oplus \phi(b) \quad \text{und} \quad \phi(a \cdot b) = \phi(a) \odot \phi(b).$$

Es sei im Folgenden $\phi : K \to L$ ein Körperhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) $\phi(-a) = -\phi(a)$ für alle $a \in K$.

(b) $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ für alle $a \in K \setminus \{0_K\}$.

(c) $\phi$ ist injektiv.

(d) $(\phi(K), \oplus, \odot)$ mit $\phi(K) := \{\phi(a) \mid a \in K\}$ ist ein Körper.

**Aufgaben zur Selbstkontrolle**

(i) Definieren Sie den Begriff *Ring*. Wann wird ein Ring *kommutativ* genannt? Was versteht man unter einem *Ring mit Eins*?

(ii) Definieren Sie den Begriff *Körper*.

(iii) Was versteht man unter *Nullteilerfreiheit*?

(iv) Für welche $m$ ist $(F_m, +_m, \cdot_m)$ nullteilerfrei? In welchem Fall handelt es sich um einen Körper?

(v) Es sei $(G, +, \cdot)$ eine Menge mit zwei Verknüpfungen und $a, b \in G$. Welche der Gleichungen

$$a + x = b \quad \text{und} \quad a \cdot x = b$$

ist nach $x$ auflösbar, wenn es sich bei $(G, +, \cdot)$ um einen Ring handelt? Welche, falls $(G, +, \cdot)$ ein Körper ist? Und Wie steht es um die Eindeutigkeit der Lösung in den Fällen, in welchen sie existiert?