

Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 9

Abgabetermin: Dienstag, 19.12.2023., bis 12:00 Uhr, online oder Briefkasten 3.15.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Abschätzung aus dem Beweis von Satz 2.25, die gegeben ist durch

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_1} E^{\frac{1}{2}} \left[\left| \int f(x) \hat{\pi}_{0|0}(dx) - \int f(x) \pi_{0|0}(dx) \right|^2 \right] \leq \frac{1 + D_0}{\sqrt{n}},$$

wobei D_0 definiert ist durch

$$D_0 = \frac{2 \|\gamma_0\|_{\sup}}{\int \gamma_0(x) \nu(dx)}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei Q der Übergangskern aus Aufgabe 3 Blatt 6, gegeben durch

$$Q(x, \cdot) = \mathcal{N} \left(x e^{-\alpha}, \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha}) \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei $\nu := \delta_a$ für $a \in \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein homogener Markovprozess mit Startverteilung ν und Übergangskern Q .

(i) Zeigen Sie, dass $(X_0, \dots, X_k) \sim \mathcal{N}(\mu^{(k)}, \Sigma^{(k)})$ mit

$$\mu_0^{(k)} = a, \quad \mu_n^{(k)} = a e^{-\alpha n} \quad \text{für } n = 1, \dots, k,$$

und

$$\Sigma_{0i}^{(k)} = \Sigma_{i0}^{(k)} = 0, \quad \Sigma_{ij}^{(k)} = \Sigma_{ji}^{(k)} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (e^{-\alpha|i-j|} - e^{-\alpha(i+j)}).$$

(ii) Verwenden Sie eine Programmiersprache Ihrer Wahl, um Pfade von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für verschiedene $\alpha, \sigma^2 \in (0, \infty)$ zu plotten.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 1. Weiter sei ξ_1, ξ_2, \dots eine *iid* standardnormalverteilte Folge von Zufallsvariablen, unabhängig von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Der Prozess $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$Y_n = 0.6X_n + 0.4\xi_n.$$

Sei $\alpha = 6, \sigma^2 = 2$. Eine Beobachtung (y_0, \dots, y_{100}) finden Sie in einer separaten Datei auf der Vorlesungsseite. Berechnen Sie $E[X_{100} | Y_{0:100} = y_{0:100}]$

(i) analytisch,

- (ii) approximativ mithilfe des SIS-Algorithmus,
- (iii) approximativ mithilfe des SISR-Algorithmus.

Vergleichen Sie die berechneten Werte für verschieden Stichprobengrößen. Sie dürfen zur Berechnung eine Programmiersprache Ihrer Wahl verwenden.

Hinweis: Auf der Vorlesungsseite finden Sie eine Datei, die eine Realisierung (y_0, \dots, y_{100}) des Beobachtungsprozesses Y beinhaltet. Zur Veranschaulichung wird diese im unten stehenden Schaubild zusammen mit der zugehörigen Realisierung des Signalprozesses X abgebildet.

