Übungen zu der Vorlesung „Stochastik II“

Blatt 07

Ohne Korrektur
(Die Lösungen werden an einem extra Termin präsentiert. Der Zeitpunkt wird noch bekannt gegeben.)

Aufgabe 1 (Testproblem)
Um zu testen, ob in einer Lieferung von 100 Computerakkus höchstens 10 defekt sind, prüft ein Händler jedes Mal 10 zufällig ausgewählte Akkus und nimmt die Lieferung nur dann an, wenn alle 10 in Ordnung sind. Beschreiben Sie das Verhalten des Händlers testtheoretisch (Nullhypothese, Ablehnbereich etc.) und erläutern Sie, was bei einem Fehler 1. Art und einem Fehler 2. Art passiert. Was ist die Verteilung der verwendeten Teststatistik?

Aufgabe 2 (Einfaches Regressionsmodell)
Es seien $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Beobachtungen. Wir betrachten das lineare Modell

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Berechnen Sie $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_0$.
Hinweis: Vergleichen Sie mit Beispiel 5.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (Lineare Regression und Maximum-Likelihood Schätzer)
Es seien $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ Beobachtungen und $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ i.i.d. normalverteilte Zufallsvariablen $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für $\sigma^2 > 0$. Wir betrachten das lineare Modell

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{d} \beta_i X_i^k + \epsilon_i \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Definieren und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für $(\beta_0, \dots, \beta_d)$ in diesem Modell.
Hinweis: Das Resultat lässt sich zurückführen auf Theorem 5.3

Bitte wenden!

Aufgabe 4
Es sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Zeigen Sie

(i) $\mathbb{E}[AX] = A\mathbb{E}[X]$

(ii) $\operatorname{Cov}(AX+b, AX+b) = A\operatorname{Cov}(X,X)A^\top$

(iii) Ist A positiv definit, so ist auch A^{-1} positiv definit.

Aufgabe 5 (Gleichmäßige Konvergenz)
Sei $F_n\colon [a,b] \to [0,1]$ eine Folge von Verteilungsfunktionen und es sei $F\colon [a,b] \to [0,1]$ eine stetige Verteilungsfunktion, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Hinweis: Eine Funktion $F\colon [a,b] \to [0,1]$ heißt Verteilungsfunktion, wenn sie rechtsseitig stetig und monoton wachsend ist mit $F(a) = 0$ und $F(b) = 1$.

Bemerkung: Das Resultat lässt sich anstelle des Intervalls $[a,b]$ auch für $\mathbb{R}$ beweisen. Insbesondere lässt sich das Resultat dann wie folgt formulieren (Wieso?):
Es seien X_n, X Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_n, F und es sei F stetig. Falls X_n in Verteilung gegen X konvergiert, so konvergiert F_n bereits gleichmäßig gegen F.