Kapitel 6

Exkurs: Polnische Räume

Ein normaler Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis kann auf viele Weisen metrisiert werden; man kann insbesondere eine einmal gewonnene Metrik in vielerlei Weise abändern, ohne die von ihr erzeugte Topologie zu verändern. Interessant sind diejenigen Räume, die sich so metrisieren lassen, dass sie vollständig sind ("jede Cauchy-Folge konvergiert"). Man nennt sie, nach Bourbaki, *polnische Räume* um die polnische Schule zu ehren, die in diesem Bereich in den 30er Jahren Entscheidendes geleistet hat. Es ist ein tiefliegender Satz, dass jeder polnische Raum homöomorph zu einer Borel-Teilmenge des $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist; letzterer wiederum ist Borel-isomorph zu einer Borelmenge von $[0,1]$. Viele bereits gewonnene Erkenntnisse für W-Maße auf der reellen Achse wie die Existenz regulärer bedingter Verteilungen übertragen sich somit aufwandslos auf W-Maße über allgemeinen polnischen Räumen.

Definition 6.1. (Polnischer Raum) Ein topologischer Raum $\mathcal{E}$ heißt *polnisch*, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt und vollständig metrisierbar ist (d.h. wenn es eine die Topologie erzeugende vollständige Metrik gibt).

ACHTUNG: Nicht *jede* die Topologie eines polnischen Raumes erzeugende Metrik muss vollständig sein – es gilt aber, wenn der Raum kompakt ist.

Bemerkung 6.2. In metrisierbaren Räumen ist die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie zur Existenz einer abzählbar dichten Teilmenge äquivalent – insbesondere ist also ein vollständiger, separabler, metrischer Raum polnisch.

Beispiel 6.3. (i) $\mathbb{R}^d$ mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie ist polnisch;
(ii) abzählbare Produkte polnischer Räume versehen mit der Produkttopologie sind wieder polnisch; insbesondere sind $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ polnisch.
Bei metrischen Räumen $(\mathcal{E}_k, d_k)$ wird die Produkttopologie auf $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_k$ bspw. erzeugt von

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k,y_k)}{1+d_k(x_k,y_k)}, \quad x=(x_1,x_2,...),\ y=(y_1,y_2,...);$$

(iii) $(\mathcal{C}[0,1], \sup)$ ist polnisch;

(iv) allgemein ist jeder kompakte metrische Raum $(\mathcal{E}, d)$ polnisch, und jeder Raum $(\mathcal{C}(\mathcal{E}), \sup)$ ist polnisch, falls $(\mathcal{E}, d)$ ein kompakter metrischer Raum ist;
(v) $(\mathcal{C}[0,\infty), d)$ mit

$$d(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(f,g)}{1+d_k(f,g)}, \quad \text{wobei} \quad d_k(f,g) := \sup_{x\in[0,k]} |f(x) - g(x)|,$$

ist polnisch (d erzeugt die sog. "Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta");
(vi) jeder abgeschlossene Teilraum eines polnischen Raumes ist wieder polnisch;
(vi) jeder offene Teilraum eines polnischen Raumes ist wieder polnisch (nichttrivial).

Definition 6.4. Ist $\mathcal{E}$ ein topologischer Raum, so ist die *Borelsche σ-Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. Ein Maß μ auf $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$ heißt *Borel-Maß*, falls $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen gilt.

Bemerkung 6.5. Man beachte, dass $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ nicht notwendig die σ-Algebra ist, die von einer *Basis* der Topologie erzeugt wird - letzteres gilt allgemein nur, wenn die Basis abzählbar ist, da dann Topologie $\subset \sigma(\text{Basis})$. Ohne Zusatz bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^I)$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^I$ bezüglich der Produkttopologie. Ist I abzählbar, so gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^I) = \mathcal{B}^I$. Für überabzählbares I, bspw. das Einheitsintervall $[0,1]$, gilt dies nicht (vgl. Kapitel 1).

Für viele Aussagen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie ist es gängig, einen Beweis zunächst für die reelle Achse oder einen kompakten metrischen Raum zu führen und anschließend zu erweitern auf allgemeinere Räume – oft verfährt man so beim Beweis der Existenz regulärer bedingter Verteilungen oder des Skorohod-Darstellungssatzes. Wir referieren in diesem Zusammenhang den zentralen

Satz 6.6. (Einbettung) *Sei $(\mathcal{E}, d)$ ein polnischer Raum. Sei m ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. Dann gibt es einen kompakten metrischen Raum $(\mathcal{E}^*, d^*)$ und ein Maß m^* auf $\mathcal{B}(\mathcal{E}^*)$, so dass*
(i) $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$;
(ii) $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \Rightarrow B \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^*)$ und $m(B) = m^*(B)$;
(iii) $m^*(\mathcal{E}^c) = 0$.
Insbesondere ist $\mathcal{E} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^*)$; genauer darstellbar als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen in $\mathcal{E}^*$.

Der Satz ist unmittelbare Konsequenz aus den beiden nachfolgenden unten. Der nächste Satz gibt eine Teillösung des Problems:

Satz 6.7. *Jeder polnische Raum $(\mathcal{E}, d)$ ist homöomorph zu einem Teilraum von $[0,1]^{\mathbb{N}}$, letzterer versehen mit der Produkttopologie.*

Nach dem Satz von Tychonov ist $[0,1]^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie kompakt. Satz 6.7 gewährleistet aber noch nicht die Borel-Eigenschaft der Einbettung.

BEWEIS. Die Produkttopologie auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$ lässt sich metrisieren durch die Metrik D, punktweise definiert durch

$$D(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}|x_j - y_j|, \quad \text{(vgl. Kapitel 1).}$$

Sei die Metrik d^* definiert durch $d^* := \min(d,1)$. Sie gibt offenbar Anlass zu demselben Konvergenzbegriff wie d. Sei $e_1', e_2', ...$ eine abzählbar dichte Teilmenge von $\mathcal{E}$. Mit ihrer Hilfe definieren wir die stetigen Funktion f_j, mit $f_j(e) = d^*(e, e_j')$. Man beachte, dass $\inf_j f_j(e) = 0$ gilt, da $e_1', e_2', ...$ dicht in $\mathcal{E}$ ist. Die Abbildung $\Phi : \mathcal{E} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ ordne nun jedem Element $e \in \mathcal{E}$ das Element $(f_1(e), f_2(e), ...)$ von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ zu. Dann gilt

(i) $e_n \to e \Rightarrow \Phi(e_n) \to \Phi(e)$ $(n \to \infty)$, denn $e_n \to e$ impliziert $f_j(e_n) \to f_j(e)$ für alle j und damit $D(\Phi(e_n), \Phi(e)) \to 0$ wegen $D(\Phi(e_n), \Phi(e)) \leq \sum_{j=1}^{N} 2^{-j}|f_j(e_n) - f_j(e)| + 2^{-N}$.

(ii) $\Phi(e_n) \to \Phi(e) \Rightarrow e_n \to e$ $(n \to \infty)$, denn $\Phi(e_n) \to \Phi(e)$ impliziert $f_j(e_n) \to f_j(e)$ für alle j, und es folgt $d^*(e_n, e) \to 0$ wegen $d^*(e_n, e) \leq d^*(e_n, e_j) + d^*(e_j, e) \to 2f_j(e)$ und $\inf_j f_j(e) = 0$.

(iii) Φ ist injektiv, denn $\Phi(e) = \Phi(e')$ impliziert $f_j(e) = f_j(e')$ für alle j; daraus folgt $d^*(e, e') = 0$ wegen $d^*(e, e') \leq f_j(e) + f_j(e') = 2f_j(e)$ und $\inf_j f_j(e) = 0$. □

Es bleibt zu zeigen, dass das homöomorphe Bild eine Borelmenge ist. Einen ersten Schritt liefert

Lemma 6.8. *Das homöomorphe Bild eines polnischen Raumes ist polnisch.*

BEWEIS. Sei Φ ein Homöomorphismus von $(\mathcal{E}_1, d_1)$ nach $(\mathcal{E}_2, d_2)$, und sei $(\mathcal{E}_1, d_1)$ polnisch. Sei d_1^* eine zu d_1 äquivalente vollständige Metrik, so ist die Metrik $d_2^*(e_2, e_2') := d_1^*\big(\Phi^{-1}(e_2), \Phi^{-1}(e_2')\big)$ einerseits äquivalent zu d_2, andererseits erbt sie die Vollständigkeit von d_1^*. □

Satz 6.9. *Sei $(\mathcal{E}, d)$ ein polnischer Raum, und sei $A \subset \mathcal{E}$, versehen mit der Metrik d, polnisch. Dann ist A darstellbar als $A = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ mit $G_n \subset \mathcal{E}$ offen, also insbesondere ist A eine Borelmenge.*

Bemerkung 6.10. Eine Menge, die abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist, heißt G_δ-Menge.

BEWEIS. Sei d_A eine zu d äquivalente vollständige Metrik auf A. $\bar{A}$ sei der Abschluss von A in $\mathcal{E}$. Da $\bar{A}$ eine Darstellung als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen besitzt, kann man im folgenden ohne Einschränkung $\bar{A} = \mathcal{E}$ annehmen. Zu einer nichtleeren Menge $B \subset A$ sei $d_A(B) := \sup\{d_A(e_1, e_2) | e_1, e_2 \in B\}$ der "Durchmesser" von B. Wir definieren (für $\varepsilon > 0$)

$$A_\varepsilon := \{e \in \mathcal{E} |\ \exists\ U \text{ offen mit } e \in U \text{ und } d_A(A \cap U) < \varepsilon\}$$

Dies ist wohldefiniert (d.h. stets $A \cap U \neq \emptyset$) wegen $e \in \bar{A}$. Wir zeigen: (i) $A \subset A_\varepsilon$ und (ii) A_ε ist offen. Zu (i): Sei $e \in A$, $V_n := \{e' \in \mathcal{E} | d(e, e') < n^{-1}\}$. Für $e_n, e'_n \in A \cap V_n$ gilt $d(e_n, e) \to 0$, $d(e'_n, e) \to 0$ $(n \to \infty)$, also $d_A(e_n, e) \to 0$ und $d_A(e'_n, e) \to 0$, so dass $d_A(e_n, e'_n) \to 0$ und $d_A(A \cap V_n) \to 0$ folgt. Da schließlich $d_A(A \cap V_n) < \varepsilon$, ist $e \in A_\varepsilon$. Zu (ii): Ist $e \in A_\varepsilon$, so existiert per definitionem eine offene Menge U, welche e enthält und $d_A(A \cap U) < \varepsilon$ erfüllt. Offenbar ist $U \subset A_\varepsilon$, womit A_ε als offen erkannt ist.

Insgesamt folgt: $A \subset \cap_{n=1}^\infty A_{1/n}$. Bleibt zu zeigen, dass hier Gleichheit gilt. Sei $e_0 \in \cap_{n=1}^\infty A_{1/n}$. Nach Annahme über e_0 existieren offene Mengen U_n mit $e_0 \in U_n$ und $d_A(A \cap U_n) < 1/n$. Man kann U_n nun so verkleinern, dass $\cap_{n=1}^\infty U_n = \{e_0\}$ gilt (eventuell mit $\{e \in \mathcal{E} | d(e, e_0) < 1/n\}$ schneiden). Weiter kann man allgemein U_{n+1} als Teilmenge von U_n wählen: $U_{n+1} \subset U_n$. Gilt nun $e_n \in A \cap U_n$, so ist $e_{n+k} \in A \cap U_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und also $d_A(e_n, e_{n+k}) < 1/n$, was (e_n) als d_A-Cauchy-Folge ausweist; diese konvergiert gegen ein Element a von A, da (A, d_A) vollständig ist. Somit folgt $d(e_n, a) \to 0$. Andererseits gilt $d(e_n, e_0) \to 0$, und es folgt $e_0 = a \in A$. □

BEWEIS (Satz 6.6). Nach Satz 6.7 existiert ein Homöomorphismus $\Phi : \mathcal{E} \to A \subset [0,1]^\mathbb{N}$. Nach Lemma 6.8 ist $A = \Phi(\mathcal{E})$, versehen mit der Bildmetrik $d(\Phi^{-1}(.), \Phi^{-1}(.))$, ein polnischer Raum, also auch bezüglich der äquivalenten Metrik D. Nach Satz 6.9 ist A somit eine Borelmenge in $[0,1]^\mathbb{N}$. Nun identifiziert man e mit $\Phi(e)$ und definiert das Maß m^* auf der Borel-σ-Algebra von $[0,1]^\mathbb{N}$ durch $m^*(B) = m(B \cap \mathcal{E})$. □

Satz 6.11. *Jeder polnische Raum ist Borel-isomorph zu einer Borel-Teilmenge von* $[0,1]$ *– d.h. es existiert eine Borel-messbare Injektion* $\phi : \mathcal{E} \to [0,1]$ *mit* $\phi(\mathcal{E}) \in \mathcal{B}([0,1])$ *und Borel-messbarer Inversen* $\phi^{-1} : \phi(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$.

BEWEIS. Übungsaufgabe. (Hinweis: Nach Satz 6.6 ist es ausreichend, die Aussage für $[0,1]^\mathbb{N}$ zu verifizieren, was mithilfe eines Standardarguments über Binärentwicklungen und Anordnung nach dem Cantorschen Diagonalverfahren folgt. Extra Sorge muss allerdings noch dafür getragen werden, dass die messbare Abbildung injektiv wird mit messbarem Bild.) □

Reguläre bedingte Verteilungen, Desintegration und Skorohod-Kopplung

Zur Erinnerung wiederholen wir die

Definition 6.12. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W'tsraum, $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ eine messbare Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Ein Markovkern $K : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ heißt *reguläre bedingte Verteilung* von X gegeben $\mathcal{F}$, falls die Abbildung $\omega \mapsto K(\omega, B)$ für jedes $B \in \mathcal{S}$ eine Version von $\mathbb{P}^X(B|\mathcal{F})$ ist.

Im Falle $S = \Omega$ und $X =$ Identität wird K *reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit* genannt.

Satz 6.13. (Reguläre bedingte Verteilung) *Sind S polnisch, $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{B}(S))$ messbar und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra, so existiert eine reguläre Version der bedingten Verteilung $\mathbb{P}^{X|\mathcal{F}}$.*

BEWEIS. Vermöge des Einbettungssatzes 6.6 und Satz 6.11 existiert eine messbare bijektive Abbildung φ von S in eine Borelsche Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit messbarer Inversen $\varphi^{-1} : \varphi(S) \to S$. Nach dem bereits bekannten Resultat für reellwertige Zufallsvariable existiert eine reguläre bedingte Verteilung von $\mathbb{P}^{\varphi\circ X|\mathcal{F}}(B)$ in Form eines Markovkernes $K'(\omega, B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Für jedes $A \in \mathcal{S}$ definiert man nun $K(\omega, A) := K'(\omega, \varphi(A))$. □

Wird die Unter-σ-Algebra von einer Zufallsvariable Y erzeugt, schreibt man auch $\mathbb{P}^{X|Y}$ anstelle von $\mathbb{P}^{X|\mathcal{F}}$. Existiert eine reguläre bedingte Verteilung von X gegeben Y in Form eines Markovkernes $K : (\Omega, \sigma(Y)) \to (S, \mathcal{S})$, so impliziert die $\sigma(Y)$-Messbarkeit von $K(., B)$ für jedes $B \in \mathcal{S}$ die Darstellung $K(\omega, B) = h(Y(\omega), B)$ (Faktorisierungslemma), wobei $h(., B)$ für jedes $B \in \mathcal{S}$ eine $\mathcal{S}$-$\mathcal{B}([0,1])$-messbare Abbildung ist, und für jedes y ist $h(y, .)$ ($= \mathbb{P}^{X|Y=y}(.)$) ein Maß auf $\mathcal{S}$. Analog faktorisiert die bedingte Erwartung.

Bemerkung 6.14. Es sei darauf hingewiesen, dass eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Tat nicht immer existiert. Das erste Gegenbeispiel hierfür geht übrigens zurück auf Dieudonné (1948).

Das nachfolgende Resultat erweitert den Satz von Fubini und kann angesehen werden als Desintegration von Maßen auf einem Produktraum in ihre eindimensionalen Komponenten.

Satz 6.15. (Desintegration) *Seien X, Y Zufallsvariable von $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{E}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{E}$ ein polnischer Raum sei. Dann gilt*

$$\int f(x,y) d\mathbb{P}^{(X,Y)}(x,y) = \int\int f(x,y) d\mathbb{P}^{X|Y=y}(x) d\mathbb{P}^Y(y) = \int\int f(x,y) d\mathbb{P}^{Y|X=x}(y) d\mathbb{P}^X(x)$$

für alle (absolut) integrierbaren $f : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$.

BEWEIS. Der Beweis des Resultates für reellwertige Zufallsvariablen (Wahrscheinlichkeitstheorie I) kann wörtlich übernommen werden; die Existenz der bedingten Verteilungen folgt aus Satz 6.13, ihre Darstellbarkeit als Funktion von Y (bzw. X) liefert das Faktorsierungslemma. □

Der nächste Satz ermöglicht es, Resultate über schwache Konvergenz von Verteilungen auf f.s.-Konvergenzaussagen von Zufallsvariablen zurückzuführen.

Satz 6.16. (Kopplung, Skorohod-Dudley) *Seien $\xi_1, \xi_2, ...$ Zufallsvariablen in einem polnischen Raum $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathcal{E}))$ mit $\xi_n \to_{\mathcal{D}} \xi$. Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Zufallsvariablen $\eta =_{\mathcal{D}} \xi$ und $\eta_n =_{\mathcal{D}} \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $\eta_n \to \eta$ fast sicher.*

Der Beweis lässt sich ebenfalls mithilfe der Sätze 6.6 und 6.11 vereinfachen – die Übertragung ist nicht so glatt wie bei den vorangehenden Resultaten, da der Borel-Isomorphismus nicht stetig sein muss. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Ausführung und verweisen auf O. Kallenberg, Theorem 4.30.

Satz 6.17. (Borel-Maße auf metrischen Räumen) *(i) Jedes endliche Borel-Maß auf einem metrischen Raum $(\mathcal{E}, d)$ ist* **regulär**, *d.h. für alle $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ und eine offene Menge $G \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ mit $F \subset B \subset G$ und $\mathbb{P}(G \setminus F) < \varepsilon$.*

(ii) Zwei endliche Borel-Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf $(\mathcal{E}, d)$ sind identisch, falls

$$\int f d\mathbb{P} = \int f d\mathbb{Q}$$

für alle $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{E})$ gilt.

BEWEIS. (i) Siehe Billingsley (1999), Theorem 1.1 und Theorem 1.2.

(ii) Da die offenen Mengen einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ darstellen, reicht es zu zeigen, dass der Indikator jeder offenen Menge O monoton durch $\mathcal{C}_b(\mathcal{E})$-Funktionen $f_{n,O}$ approximiert werden kann. Die Behauptung folgt dann aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. Sei nun $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1]$ diejenige stetige Funktion mit $h(0) = 0$, welche auf $[1, \infty)$ konstant gleich 1 ist und auf $[0,1]$ linear. Dann gilt $f_{n,O} \nearrow I_O$ mit $f_{n,O}(x) := h(n \cdot d(x, O^c))$. □

Satz 6.18. (Ulam's Theorem) Sei $\mathbb{P}$ ein endliches Borel-Maß auf einem polnischen Raum. Dann gibt es für alle $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ mit $K \subset B$ und $\mathbb{P}(B \setminus K) < \varepsilon$. Insbesondere ist also jedes Borel-Maß straff.

BEWEIS folgt aus Proposition 1.4 sowie Satz 6.6. □

Wichtigstes Beispiel eines polnischen Raumes als Bildraum der Brownschen Bewegung ist für die nachfolgenden Kapitel der Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}[0,1]$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Proposition 6.19. (Der Raum $(\mathcal{C}[0,1], \sup)$)
(i) Die endlichdimensionalen Projektionen $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ sind stetig und somit messbar.
(ii) Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathcal{B}(\mathcal{C}[0,1]) = \mathcal{B}^{[0,1]} \cap \mathcal{C}[0,1]$ (vgl. Kapitel 1).

BEWEIS. (i) Offenbar sind zu endlichem $F = \{t_1, ..., t_k\} \subset [0,1]$ die Urbilder offener Mengen bezüglich der Produkttopologie auf $\mathbb{R}^F$ offen in $\mathcal{C}[0,1]$. (Da die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^F$

für endliches $F \subset [0,1]$ metrisierbar ist, kann man alternativ auch mit dem Folgenkriterium argumentieren.)

(ii) Die Mengen der Form $\pi_t^{-1}(O)$ mit O offen in $\mathbb{R}$ für $t \in [0,1]$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}^{[0,1]} \cap \mathcal{C}[0,1]$ und sind nach (i) 0ffen in $(\mathcal{C}[0,1], \sup)$. Die Inklusion $\mathcal{B}^{[0,1]} \cap \mathcal{C}[0,1] \subset \mathcal{B}(\mathcal{C}[0,1])$ ist somit klar.

Da die offenen ε-Kugeln $U_\varepsilon(f_n) := \{f \in \mathcal{C}[0,1] | \sup_t |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon\}$ mit rationalem Radius zu einer separablen Menge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie von $(\mathcal{C}[0,1], \sup)$ bilden, ist es hinreichend für die umgekehrte Inklusion nachzuweisen, dass jedes Element dieser Basis in $\mathcal{B}^{[0,1]} \cap \mathcal{C}[0,1]$ enthalten ist. Dies wiederum gilt wegen $U_\varepsilon(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \pi_q^{-1}(U_{\varepsilon-1/n}(f(q)))$. □

Bemerkung 6.20. Damit definieren die endlichdimensionalen Projektionen ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem, womit ein W-Maß auf $(\mathcal{C}[0,1], \mathcal{B}(\mathcal{C}[0,1]))$ eindeutig durch seine endlichdimensionalen Verteilungen bestimmt ist.