UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie — Sommersemester 2023

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 19.05.2022, um 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Begründen oder widerlegen Sie:

1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$, wobei $\lambda|_{[0,1]}$ das Lebesgue Maß auf $[0,1]$ bezeichnet. Dann haben X_1 und X_2 mit $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ die gleiche Verteilung.
2. Sei $(\Omega, \mathscr{F}) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$. Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P, sodass X_1 und X_2 mit $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ nicht die gleiche Verteilung haben.
3. Sei $X \sim \mathcal{N}(2,2)$ normalverteilt mit Erwartungswert 2 und Varianz 2. Dann gilt, dass $P[|X-2| \geq 2] \leq \frac{1}{2}$.
4. Jede reellwertige Zufallsvariable besitzt eine Dichte bezüglich dem Lebesgue-Maß.
5. Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Falls $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (die Potenzmenge von Ω), dann sind alle Abbildungen $f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar.
6. Seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ normalverteilt. Es gilt $E[XY] \leq \sqrt{2}$.
7. Eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X ist genau dann zu sich selbst unabhängig, wenn sie fast sicher konstant ist.
8. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = \mathbb{1}_A$ und $Y = \mathbb{1}_B$ für $A, B \in \mathscr{A}$. Es gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$ genau dann, wenn A und B unabhängig sind.
9. Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Dann gilt $E[X^4] \geq E[X]^4$.
10. Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{A})$, welche die selben Nullmengen besitzen. Dann existiert eine messbare Abbildung $f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, sodass
$$\mu(A) = \int_A f(\omega)\nu(d\omega).$$
11. Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Falls $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset\}$, so gibt es keine messbare Abbildung
$$f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$
12. Sei X exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = 6$ und Y exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = \frac{1}{3}$. Dann gilt
$$E[XY] \leq 1.$$
Hinweis: Für eine zum Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable Z gilt $E[Z] = \frac{1}{\lambda}$ und $E[Z^2] = \frac{2}{\lambda^2}$.
13. $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ impliziert $X \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, P)$ für alle $q \leq p$, wobei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Hinweis: Wiederholen Sie zunächst Satz 6 und Satz 8 bevor Sie versuchen die Aufgaben lösen.

Lösung. 1. Wir müssen zeigen, dass die Bildmaße $\lambda \circ X_1^{-1}$ und $\lambda \circ X_2^{-1}$ übereinstimmen. Hier genügt es zu prüfen, dass diese auf den Mengen $[a, b]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ übereinstimmen (Wieso?). Nun gilt

$$\lambda \circ X_1^{-1}([a,b]) = \lambda(\omega \in [a,b]) = b - a = \lambda(\omega \in [1-b, 1-a]) = \lambda(1 - \omega \in [a,b]) = \lambda \circ X_1^{-1}([a,b]).$$

2. Sei $f = 0.5\mathbb{1}_{[0,1/2)} + 1.5\mathbb{1}_{[1/2,1]}$ und definiere P durch

$$P(A) = \int_A f(\omega)\lambda(d\omega)$$

für $A \in \mathscr{B}([0,1])$. Nun gilt aber

$$P \circ X_1^{-1}([0, 0.25]) = P([0, 0.25]) = \int_{[0,0.25]} f(\omega)\lambda(d\omega) = 0.5 * 0.25$$

und

$$P \circ X_2^{-1}([0, 0.25]) = P((1 - 0.25, 1 - 0])) = P([0.75, 1]) = 1.5 * 0.25.$$

Ein weiteres Gegenbeispiel wäre zum Beispiel $P = \delta_{\{0.3\}}$. Dann gilt $X_1 = 0.3$ fast sicher und $X_2 = 0.7$ fast sicher und damit können X_1 und X_2 nicht die gleiche Verteilung haben.

3. Ja, das folgt mit der Tschebycheff Ungleichung:

$$P[|X - 2| \geq 2] \leq \frac{Var(X)}{2^2} = 2/4 = 1/2$$

4. Nein, das stimmt nicht. Zum Beispiel $X = 1$.
5. Ja, da jede Abbildung $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega)$ erfüllt.
6. Es gilt mit Hölder-Ungleichung bzw. Cauchy-Schwarz: $E[XY] \leq E[X^2]^{1/2}E[Y^2]^{1/2} = \sqrt{1}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
7. Ist X zu sich selbst unabhängig so gilt für $k \in \mathbb{N}$, dass $P[X^{-1}(\{k\})] = P[X^{-1}(\{k\})]^2$. Damit folgt $P[X^{-1}(\{k\})] \in \{0, 1\}$. Nun kann $P[X^{-1}(\{k\})] = 1$ nur für ein $k \in \mathbb{N}$ gelten. Es folgt, dass X fast sicher konstant ist. Ist $X = k_0$ fast sicher konstant, so gilt $P[X^{-1}(A)X^{-1}(B)] = \mathbb{1}_{k_0 \in A \cap B} = \mathbb{1}_{k_0 \in A}\mathbb{1}_{k_0 \in B} = P[X^{-1}(A)]P[X^{-1}(B)]$.
8. Ja, $E[XY] = P[A \cap B] = P[A]P[B] = E[X]E[Y]$ bzw $P[A \cap B] = E[XY] = E[X]E[Y] = P[A]P[B]$.
9. Die Funktion $f(x) = x^4$ ist konvex. Damit folgt die Aussage mit der Jensen-Ungleichung (Unabhängig von der Verteilung).
10. Ja, das folgt aus dem Satz von Radon-Nykodym.
11. Nein, alle konstanten Abbildungen sind messbar.
12. Ja, Hölder-Ungleichung bzw. Cauchy-Schwarz: $E[XY] \leq E[X^2]^{1/2}E[Y^2]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\sqrt{2}}{1/3} = 1$
13. Ja, Hölder-Ungleichung: $E[X^q] = E[(X^q) * 1] \leq \|X^q\|_{L^{\tilde{p}}}\|1\|_{L^{\tilde{q}}} < \infty$ mit $\tilde{p} = q/p$ und $\tilde{q} = \tilde{p}/(\tilde{p} - 1)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0, 1])$ und $P = \lambda|_{[0,1]}$ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen sei gegeben durch

$$X_1 = 0 \text{ und } X_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher.
3. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in L^2.

4. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Lösung. 1. Es gilt $E[|X_n|] = \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0$. Damit konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L^1 gegen 0. Nach Theorem 22 ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch konvergent gegen 0 und gleichgradig integrierbar.

2. Wähle $x \in (0,1)$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x \geq \frac{2}{n}$ für alle $n > N$. Insbesondere gilt dann $x \notin (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ für alle $n > N$, und somit $X_n(x) = 0$ für alle $n > N$. Weiter gilt $X_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die fast sichere Konvergenz gezeigt.

3. Aus der L^2 Konvergenz folgt die stochastische Konvergenz. Damit muss der Grenzwert (falls exisistent) 0 sein. Nun gilt aber

$$E[|X_n|^2] = \frac{\sqrt{n}^2}{n} = 1.$$

Die Folge konvergiert somit nicht in L^2

4. Siehe 1.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P)$. Das Maß P sei absolut stetig bezüglich dem Lebesgue-Maß $\lambda|_{[0,1]}$ mit Dichte

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \omega \in [0,1].$$

Sei die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen gegeben durch

$$X^n(\omega) = \omega^{1/n}, \quad \omega \in [0,1].$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.
2. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher.
3. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in L^1.
4. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Lösung. 1. Folgt aus 2.

2. Es gilt $\omega^{1/n} \to 1$ für alle $\omega \in (0,1]$. Da $\{0\}$ eine Nullmenge bezüglich λ und damit auch bezüglich P ist, gilt die fast sichere Konvergenz.

3. Falls ein L^1-Grenzwert existiert, so müsste dieser auch 1 sein. Wir prüfen also $X_n \to 1$ in $L^1(P)$. Es gilt

$$E[|X_n - 1|] = E[(1 - X_n)] = \int_0^1 (1 - X_n)f(x)dx = 1 - \int_0^1 X_n f(x)dx.$$

und weiter

$$2\int_0^1 X_n f(x)dx = \int_0^1 x^{1/n-1/2}dx = \int_0^1 x^{(2-n)/2n}dx = [\frac{2n}{2+n}x^{2n/(2+n)}]_0^1 \to 2.$$

Damit gilt die L^1-Konvergenz.

4. Da die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in L^1 ist, ist die Folge auch nach Satz 22 gleichgradig integrierbar.