Übungen zur Vorlesung
"Stochastische Analysis"

Sommersemester 2017, Blatt 6

Abgabetermin: 02.06.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$ progressiv messbare Prozesse mit stetigen Pfaden und $Y_t := \int\limits_0^t f(X_s)ds$ für ein $f \in C_b(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{Y}$ hat Pfade von lokal beschränkter Variation,

b) $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Y} = \mathcal{Z} f(\mathcal{X}) \cdot \lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß ist, also $(\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Y})_t = \int\limits_0^t Z_s f(X_s) ds$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Sei $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. Zeigen Sie, dass jeder adaptierte, integrierbare Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$ eine fast sicher eindeutige Zerlegung $X = M + A$ besitzt, wobei M ein Martingal und A vorhersagbar ist. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Sub-Martingal ist, wenn A fast sicher nicht fällt.

Hinweis: Sei $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ein Prozess $A = (A_t)_{t \in I}$ heißt $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$-vorhersagbar, falls $A_0 = 0$ gilt und A_t messbar bezüglich $\mathcal{F}_{t-1}$ ist für $t \in I \backslash \{0\}$.

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Zeigen Sie Proposition 1.24 aus der Vorlesung:
Sei X ein stetiges Semimartingal, $V \in L(X)$ und τ eine Stoppzeit. Dann gilt

$$(V \cdot X)^\tau = V \cdot X^\tau = V \mathbf{1}_{[0,\tau]} \cdot X$$

fast sicher.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Folge von stetigen Semimartingalen $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $X^n = (X^n_t)_{t \geq 0}$ existiert, so dass $\sup_{t \geq 0} |X^n_t| \xrightarrow{P} 0$, aber $[X^n]_t \overset{P}{\nrightarrow} 0$ für alle $t > 0$.

Hinweis: Sei W eine Brownsche Bewegung, gestoppt zur Zeit 1. Definiere $A^n_{k2^{-n}} = W_{(k-1)2^{-n}}$ für $k = 1, \dots, 2^{-n}$, $A^n_0 = W_0$ und interpoliere linear. Betrachte $X^n = W - A^n$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-stochastische-analysis-ss-2017`