

Übungen zur Vorlesung “Stochastik“

Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 29.5.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird $n = 300$ mal geworfen. Schätzen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die folgenden Wahrscheinlichkeiten ab. Verwenden Sie dazu die auf der letzten Seite beigefügte Tabelle.

- a) Die Wahrscheinlichkeit, dass öfter als 170 Mal eine gerade Zahl geworfen wird.
- b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe S_n der Augenzahlen kleiner als $a = 800$ oder größer $b = 1200$ ist, also $P(S_n < a \text{ oder } S_n > b)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Man beweise mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes das schwache Gesetz der großen Zahlen für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $(X_i)_{i \geq 1}$ mit $E[X_1^2] < \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei p der Anteil der Wahlberechtigten eines Landes, die vorhaben, bei der nächsten Wahl für eine bestimmte Partei zu stimmen. Ein Meinungsforschungsinstitut möchte p mit einer Abweichung von höchstens 2 Prozentpunkten schätzen. Wie groß muss die Stichprobe gewählt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass die Schätzung innerhalb der geforderten Toleranzgrenzen liegt, 95% betragen soll?

Hinweis: Verwenden Sie wieder eine Normalapproximation und die beigefügte Tabelle. Beachten Sie, dass p den Meinungsforschern natürlich unbekannt ist, also nicht in die Berechnung der Stichprobengröße einfließen kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 σ -Algebren auf einem gemeinsamen Grundraum Ω . Zeigen Sie:

- a) $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ist im Allgemeinen keine σ -Algebra.
- b) $\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_1 \triangle \mathcal{A}_2$ sind keine σ -Algebren. Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ zweier Mengen A und B ist definiert als $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Abbildung 1: Obige Tabelle gibt verschiedene (gerundete) Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ wieder. Um den Wert für $\Phi(x)$ abzulesen, rundet man zunächst x auf zwei Nachkommastellen und findet dann den approximativen Wert für $\Phi(x)$ in derjenigen Zeile und Spalte deren Zeilen-, und Spaltenbeschriftung in Summe x ergeben. So sucht man z.B. für $\Phi(0.947)$ die mit 0.9 beschriftete Zeile und die mit 0.05 beschriftete Spalte, da $0.9 + 0.05 = 0.95 \approx 0.947$, und findet den Wert $\Phi(0.947) \approx 0.8289$.