Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 17.07.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Fisher-Information $I(\theta)$ für

a) die Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$, $p(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$, $\theta \in \mathbb{R}$,

b) die Exponentialverteilung $p(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$,

und überprüfen Sie, ob die Schätzer

a) $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, für X_i unabhängig identisch nach $N(\theta, \sigma^2)$ verteilt,

b) $\hat{\theta}_n = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i \right)^{-1}$, für X_i unabhängig identisch nach $\mathrm{Exp}(\theta)$ verteilt,

im jeweiligen Fall die Cramér-Rao-Schranke erreichen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe unabhängiger und identisch nach P_θ, $\theta \in (0,1)$, verteilter Zufallsgrößen, wobei

$$P_\theta(X_i = 0) = \theta \quad \text{und} \quad P_\theta(X_i = -1) = P_\theta(X_i = 1) = \frac{1-\theta}{2}.$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ für θ und zeigen Sie, dass $\hat{\theta}(X)$ für $n \to \infty$ stochastisch gegen θ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}(X) - \theta| > \varepsilon) = 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit, beim Schwarzfahren in der Straßenbahn erwischt zu werden, sei $p \in (0,1)$. Nach einer Kontrolle sitzen n Schwarzfahrer zusammen und erzählen sich, wie häufig sie bereits unentdeckt ohne Fahrschein fahren konnten, bevor sie erwischt wurden. Der i-te Schwarzfahrer gibt dabei an, dass er erst bei der X_i-ten Fahrt kontrolliert (und damit ertappt) wurde.

a) Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die X_i unabhängig voneinander sind, den Maximum-Likelihood-Schätzer $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ für p.

b) Berechnen Sie den Schätzwert für p im Fall $n = 6$ und $X_1 = 7$, $X_2 = 9$, $X_3 = 12$ $X_4 = 5$, $X_5 = 11$, $X_6 = 6$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch auf $[0, \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass $\Pi_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\Pi_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ kein erwartungstreuer Schätzer für θ ist, und folgern Sie aus Ihrer Rechnung, wie Π_n abzuwandeln ist, um einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten.

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $P(\Pi_n \leq x)$ und daraus die Dichte der Verteilung von Π_n.

c) Zeigen Sie, dass Π_n stochastisch gegen θ konvergiert.