Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 15.5.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für natürliche Zahlen n und r sei $[n]_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$. Zeigen Sie, dass für $n \to \infty$ und $\frac{r}{n} \to 0$ gilt:

$$\frac{[n]_r}{n^r} = \exp\left(\frac{-r^2+r}{2n}(1+o(1))\right).$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Approximationsformel die Wahrscheinlichkeit, dass die Schüler einer 30-köpfigen Schulklasse an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.
Hinweis: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist "klein-o von 1" ($a_n = o(1)$), falls $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Das bedeutet also, dass sich der Exponent $\frac{-r^2+r}{2n}(1+o(1))$ für $n \to \infty$ asymptotisch genauso verhält wie $\frac{-r^2+r}{2n}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $\alpha > 0$ durch

$$f_\alpha(x) := 2\alpha x e^{-\alpha x^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

eine Dichte auf $\mathbb{R}$ gegeben ist, und berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.
Verifizieren Sie weiterhin für eine gemäß dieser Dichte verteilte Zufallsvariable X:

$$E(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Zufallsvariable Y ist invers gammaverteilt ($Y \sim iG(\lambda,\delta)$), falls ihre Verteilung die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$d_{iG(\lambda,\delta)}(x) = \frac{\delta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{-\lambda-1} e^{-\frac{\delta}{x}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \qquad \lambda > 0, \delta > 0$$

besitzt (die Verteilung hat also die gesamte Masse auf $\mathbb{R}_+$, d.h. Y ist nicht-negativ). Dabei ist

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

die Gamma-Funktion. Überlegen Sie sich zunächst, bis zu welcher Schranke $\bar{r}$ die r-ten Momente von Y existieren ($E[Y^r] < \infty$ für alle $r < \bar{r}$), und leiten Sie dann eine Formel für die r-ten Momente $E[Y^r]$ her.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängig und identisch standardnormalverteilt, Y unabhängig von den Z_i und invers gammaverteilt zu den Parametern $\lambda = 2$, $\delta = 1$ ($Y \sim iG(2,1)$). Setze $X_i = Z_i + Y/i^2$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Überlegen Sie zunächst, dass $X_1, \ldots, X_n$ weder unabhängig und identisch verteilt sind noch endliche Varianzen besitzen (vgl. Aufgabe 3). Die Voraussetzungen des Zentralen Grenzwertsatzes sind also nicht erfüllt! Zeigen Sie, dass aber dennoch für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \Phi(x),$$

wobei $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.
Hinweis: Setzen Sie $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2\sqrt{n}}$ und betrachten Sie

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x, |Ya_n| > \varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x, |Ya_n| \leq \varepsilon\right),$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie nun, dass eine der beiden Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite gegen 0 konvergiert und schätzen Sie die andere geeignet nach oben und unten ab.