Übungsaufgaben für die Klausur zu "Stochastik"

Aufgabe 1

Ein Autokennzeichen besteht aus 5 Zeichen. Die ersten beiden Zeichen sind Großbuchstaben, die restlichen Ziffern.

a) Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es?

b) Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf?

c) Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es, wenn nicht 3 Nullen gleichzeitig auftreten dürfen?

d) Wie viele unterschiedliche Autokennzeichen gibt es, bei denen eine aufsteigende Folge aufeinander folgender Zahlen vorkommt?

Aufgabe 2

Sie würfeln einmal mit 5 Würfeln. Geben Sie das Modell (Grundraum und Elementarwahrscheinlichkeiten) vollständig an! Wie wahrscheinlich ist es, fünf aufeinander folgende Zahlen (eine *große Straße* beim Kniffel-Spiel) zu erhalten?

Aufgabe 3

In einer Urne befinden sich 6 blaue, 5 schwarze und 4 weiße Kugeln. Nacheinander werden ohne Zurücklegen 2 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) haben beide Kugeln die gleiche Farbe?

b) ist die zweite gezogene Kugel blau oder weiß?

Aufgabe 4

Im Mittel sind 5% aller elektronischen Bauteile einer Serienproduktion defekt. Ein Routinetest schlägt bei 98% aller defekten und bei 2% aller funktionstüchtigen Bauteile Alarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Bauteil, bei dem der Test einen Fehler meldet, tatsächlich defekt?

Aufgabe 5

Die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) sei gegeben durch die folgende Tabelle:

	$Y=-1$	$Y=1$
$X=0$	0.2	0
$X=1$	0.3	0.3
$X=2$	0	0.2

a) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Verteilung von Y und von $X+Y$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 6

Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X soll die folgende Form haben:

$$f(x) = c \cdot (x - x^2) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

a) Für welchen Wert c ist die Funktion f eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Wie sieht dann die zugehörige Verteilungsfunkion $F(x)$ aus? (Es genügt, $F(x)$ für $x \in [0,1]$ anzugeben.)

c) Berechnen Sie $E[X]$ und $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 7

a) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \sim N(1, n)$, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n} X_n$ stochastisch gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n} X_n \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

b) Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, d.h. die Verteilung von X hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes die Dichte von $Y = e^X$.

Aufgabe 8

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, d.h. $X_i \sim U([0,1])$, und sei

$$Z_n = n \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Zeigen Sie, dass Z_n in Verteilung gegen eine Exp(1)-verteilte Zufallsvariable Z konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = P(Z \leq x) \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Aufgabe 9

Es sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim P_\alpha$, $\alpha > 0$, wobei P_α die folgende Dichte hat:

$$f_\alpha(x) = \alpha x e^{-\alpha x^2/2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass es sich bei f_α tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

b) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter α.

Aufgabe 10

Zeigen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes, dass

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Der Ausdruck auf der linken Seite lässt sich als eine Wahrscheinlichkeit einer Summe von n unabhängigen, identisch verteilten Poisson-Variablen $X_1, \ldots, X_n$ auffassen.