

Übungen zur Vorlesung “Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“

Blatt 9

Abgabetermin: Freitag, 30.06.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $u \in C^1([a, b])$. Berechnen Sie die Länge $L(u)$ von $\gamma(x) = (x, u(x))$, $x \in [a, b]$, und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktional.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es beschreibe $c \in C^2([0, T], \mathbb{R}^2)$, $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ die Bewegung eines Teilchens der Masse $m > 0$ unter dem Einfluss der Schwerkraft $(0, -g)$. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$L(t, x_1, x_2, v_1, v_2) = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) + mgx_2.$$

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf und berechnen Sie die Bewegung mit den Anfangsdaten

$$c(0) = (0, 0), \quad c'(0) = v_0(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{mit } v_0 > 0 \text{ und } \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x) = f(r(x))x \quad \text{mit } r(x) = \|x\|_2$$

ein Potential.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind. Falls ja, geben Sie alle Stammfunktionen an.

a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (xy, \frac{x^2}{2}),$

b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (y, 0),$

c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x, xz, xy),$

d) $F : \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})(-y, x).$