Stochastische Integration und Finanzmathematik **SS 2016**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 12

Abgabe: 19.07.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir betrachten folgendes Zeitdiskretes Finanzmarktmodell ($t = 0, 1, 2, 3$) mit endlichen Zeithorizont $T = 3$. Dieses beinhaltet eine risikobehaftete Aktie $S = (S_0, S_1, S_2, S_3)$, sowie einen risikolosen Bankprozess $B = (B_0, B_1, B_2, B_3)$.

Es gelte $S_0 = 100$ sowie $B_0 = 1$ und für $1 \leq t \leq 3$ sei

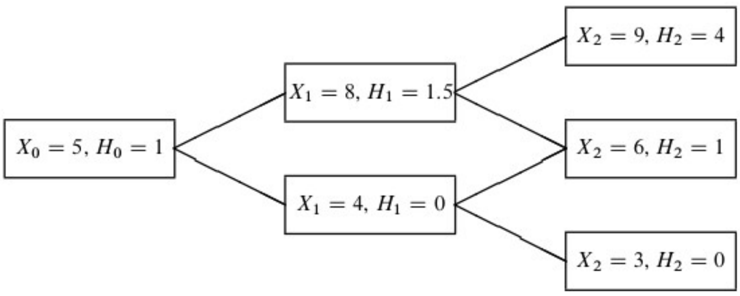
$$S_t = S_{t-1}X_t, \quad B_t = e^r B_{t-1},$$

wobei $r = 2,5\%$ und $(X_t)_t$ i.i.d. mit

$$\mathbb{P}(X_t = 1,2) = \mathbb{P}(X_t = 0,8) = \frac{1}{2}.$$

Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an. Bewerten Sie eine amerikanische Put-Option H mit Maturität $T = 3$, Strike $K = 100$. Zu jedem Ereignis, geben Sie den Ausübungszeitpunkt an. Was können Sie über einen Hedge für H sagen? Bewerten Sie nun die entsprechende Call-Option mit gleichen Parametern. Gilt die Put-Call-Parität?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Wir betrachten ein Marktmodell mit einer Aktie S und zugehörigem diskontierten Prozess X. Ferner besteht eine amerikanische Option H. Die verschiedenen möglichen Verläufe sind in der Grafik unten dargestellt. Wir nehmen hierbei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an unter welchem jedes Ereignis die selbe Wahrscheinlichkeit hat.



Finden Sie eine optimale Stopp-Strategie σ welche $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[H_\tau]$ über $\tau \in \mathcal{T}$ maximiert. Wiederholen Sie den Vorgang um $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sqrt{H_\tau}\right]$ zu maximieren. Zeigen Sie als nächstes dass es ein eindeutiges Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gibt und bestimmen Sie die Snell'sche Einhüllende $U^{\mathbb{Q}}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei

$$H_t^K := \frac{(K - S_t)^+}{(1+r)^t}$$

die diskontierte Auszahlung einer amerikanischen Put-Option mit Strike K in einem Markmodell mit einer Aktie $S = (S_t)_{t=1,\dots,T}$ und einem Bankprozess $B_t = (1+r)^t$ für ein $r > 0$. Bezeichne τ_m^K die minimale optimale Stoppzeit für den Käufer der Option um $\mathbb{E}\left[H_\tau^K\right]$ über $\tau \in \mathcal{T}$ zu maximieren.

(a) Zeigen Sie $\tau_m^K \geq \tau_m^{K'}$ $\mathbb{P}$ fast sicher wenn $K \leq K'$.

(b) Zeigen Sie

$$\text{ess inf}_{K \geq 0} \tau_m^K = 0, \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(c) Nutzen Sie (b) um zu zeigen dass für $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ein $K_0 \geq 0$ existiert für das $\tau_m^K = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $K \geq K_0$.