Review: *Optimal Transport. Old and New.* von C. Villani.

Dieses eindrucksvolle Werk von C. Villani im Umfang von 973 Seiten ist eine Fortsetzung, eine Vertiefung und Erweiterung der *Topics in Optimal Transportation* von 2003 desselben Autors. Es ist jedoch unabhängig von dem Vorgänger zu lesen. Das Buch ist in drei große Themenkreise gegliedert, die qualitativen Eigenschaften des optimalen Transports in Teil 1, der Zusammenhang des optimalen Transports mit Riemannscher Geometrie in Teil 2 und die Behandlung des Zusammenhangs von optimalem Transport und Krümmungsverhalten in allgemeinen nichtglatten metrischen Maßräumen in Teil 3.

Die Dualitätstheorie für das Monge-Kantorovich Transportproblem war seit der Arbeit von Kantorovich 1942 in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik bis in die 80-er Jahre weit entwickelt worden und hatte dort zahlreiche Anwendungen in der Kantorovich–Formulierung auf Probleme der optimalen Couplings und vieler anderer probabilistischer Anwendungen gefunden (vgl. die Übersichtsarbeit [Rü07] in dem JB Band 109). Für die Bedeutung in der Geometrie und Analysis war vor allem die Erkenntnis grundlegend, daß durch die Lösung des Kantorovich-Problems im Falle quadratischer Kostenfunktionen unter allgemeinen Bedingungen auch das zugehörige Monge-Problem gelöst wird (vgl. [Br87, Br91] und [RR90]).

Dieses ergibt sich aus der Charakterisierung optimaler Lösungen (X, Y) des Transportproblems über Subgradienten konvexer Funktionen direkt aus dem Rademacher Theorem für konvexe Funktionen (vgl. Theorem 9.4). Für allgemeine Kostenfunktionen auf allgemeinen Grundräumen folgt aus der Dualitätstheorie eine ähnliche Charakterisierung optimaler Transportpläne über die Bedingung $Y \in \partial_c f(X)$ – dem c-Subgradienten einer c-convexen Funktion (vgl. [Rü91]). Ein Hauptgegenstand der neueren Entwicklung in der Analysis des Transportproblems ist es, Bedingungen zu finden, die sicherstellen, daß der c-Subgradient f.s. eindeutig ist und damit eine Monge-Lösung impliziert und ist es weiter, Regularitätseigenschaften dieser Lösung zu beschreiben.

Über die Transformationsformel für Integrale besteht eine direkte Beziehung des Monge-Kantorovich-Problems zu partiellen Differentialgleichungen vom Monge-Ampère-Typ. Durch die Entdeckung des Zusammenhangs von optimalem Transport mit Lösungen inkompressibler Euler-Gleichungen von Brenier (1989) wurde ein weiteres Tor zu partiellen Differentialgleichungen und zu *minimalen Flüssen* in der geometrischen Mather und Aubry Theorie geöffnet. Einführung und Erläuterung dieser Zusammenhänge ist Hauptgegenstand von Villani's Buch. Im Folgenden beschreiben wir einige der Hauptlinien der drei Teile.

Nach einem vollständigen Beweis des Kantorovich Dualitätssatzes unter allgemeinen Bedingungen in Theorem 5.10 wird ausführlich der zentrale Begriff der *Displacement-Interpolation* in allgemeiner Form eingeführt. Die Kostenfunktion $c(x, y)$ wird durch eine Lagrangesche Aktionsfunktion A induziert. Eine Kurve die die Aktion zwischen ihren Endpunkten minimiert heißt *minimierende Kurve*, eine Verallgemeinerung der Geodätischen im geometrischen Kontext. Das Hopf-Rinow-Theorem gibt ein klassisches Kriterium für deren Existenz. Seien μ_0, μ_1 Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Grundraum und X_0, X_1 ein optimales Coupling von μ_0, μ_1. Sei weiter $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ eine zufällige minimierende Kurve von X_0 nach X_1, ein optimales dynamisches Coupling. Dann ist Π, die Verteilung von $(X_t)_{0\leq 1\leq 1}$, eine Verteilung auf der Menge Γ der aktionsminimierenden Kurven. Seien μ_t, $0 \leq t \leq 1$ die Randverteilungen von Π, d.h. die Verteilungen von X_t, dann heißt (μ_t) eine *Displacement*-Interpolation von μ_0, μ_1. Unter allgemeinen Bedingungen ist (μ_t) eine *geodätische* Kurve auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße bzgl. der induzierten Längenstruktur auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{P}(M)$. $\mathcal{P}(M)$ ist mit dieser Längenstruktur ein *length space*. Damit lassen sich geometrische Fragestellungen nach Geodäten aus der Riemannschen Geometrie und auch allgemeiner in Finslerstrukturen sinnvoll auf dem unendlichdimensionalen Raum $\mathcal{P}(M)$ untersuchen. Die Entwicklung der Lösung (Ψ, Φ) aus der Kantorovich-Dualität wird durch (verallgemeinerte) Hamilton-Jacobi-Gleichungen beschrieben. Das Grundprinzip der *Displacement-Interpolation* ist es also, eine Interpolation zwischen Punkten d.h. verallgemeinerte Geodätische zu liften zu einer Interpolation (Geodätischen) zwischen Wahrscheinlichkeitsmaßen. Hierdurch wird ein Zusammenhang hergestellt zwischen der Monge-Theorie und der Theorie von Mather und Aubry über minimierende Maße und minimierende Kurven aus dem Bereich der dynamischen Systeme. Die Hamilton-Jacobi-Gleichungen aus der Dualitätstheorie bei optimalem Transport entsprechen dann gerade den stationären Hamilton-Jacobi-Gleichungen in der schwachen KAM-Theorie.

Von besonderer Bedeutung im weiterem Verlauf des Buches ist die Übertragung von Mather's noncrossing Lemma (Mather's shortening Lemma) auf allgemeinere Klassen von Lagrangefunktionen. Dieses noncrossing Lemma ist ein Analogon des noncrossing Lemmas von Monge. Es ist der Schlüssel für den Beweis des *Lipschitz graph Theorems* und damit von Regularitätseigenschaften für Lösungen von Transportproblemen. Einige neue Entwicklungen zur Frage nach Differenzierbarkeitseigenschaften, Eindeutigkeit von c-Subgradienten und lokale Bedingungen zur Charakterisierung von Lösungen werden behandelt. Eine besondere Bedeutung nimmt dabei die auch in der Theorie dynamischer Systeme relevante Twist-Bedingung ein.

Der zweite Teil des Buches behandelt den Einfluß der Geometrie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf qualitative und quantitative Eigenschaften des optimalen Transports. Insbesondere wird der Einfluß von unteren Schranken an die Ricci-Krümmung auf das Konvexitätsverhalten von geeigneten Funktionalen auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße entlang von Displacement-Interpolationen beschrieben. Aus diesen Konvexitätseigenschften lassen sich in umgekehrter Richtung Krümmungsschranken rekonstruieren. An einer großen Fülle von Fragestellungen aus der Riemannschen Geometrie wie z.B. zum Wachstum des Volumens von Bällen, Sobolev-Typ Ungleichungen, Konzentrationsungleichungen und Poincaré-Ungleichungen wird gezeigt, daß sich mit Hilfe von Displacement-Konvexität, d.h. Konvexität entlang von Displacement-Kurven, viele der klassischen Resultate auf neue Weise erhalten lassen. Für eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen vom Diffusionstyp, bzw. für Fokker-Planck-Gleichungen wird gezeigt, daß sie sich aus dem Gradientenfluß eines geeigneten Energiefunktionals auf $\mathcal{P}_p(M)$, dem Raum der Wahrscheinlichkeitsfunktionale mit endlichem p-ten Momenten auf M versehen mit der minimalen ℓ_p Metrik (Wasserstein-Metrik), herleiten lassen. Die Idee hierzu geht auf Otto zurück, der die Wärmeleitungsgleichung als Gradientenfluß bezüglich des Entropiefunktionals auf $\mathcal{P}_2(M)$ beschrieben hat. Aber auch auf nichtlineare Diffusionsmodelle, wie z.B. poröse Media-Gleichungen oder p-Laplace-Typ-Gleichungen ist diese Technik angewendet worden. Eine interessante Konsequenz dieser Beschreibung sind Abschätzungen für das Stabilitätsverhalten von Lösungen der zugehörigen partiellen Differentialgleichungen. Eine wichtige Anwendung ist auch die Untersuchung des Kontraktionsverhaltens für Diffusionen in $\mathcal{P}_p(M)$, insbesondere über exponentielle Konvergenz in Gleichgewichtsverteilungen. Klassische Vorgänger solcher Konvergenzuntersuchungen waren Arbeiten von Tanaka (1973, 1978) zur Boltzmann-Gleichung für Maxwellsche Moleküle. Es wird in Villanis Buch auch kurz auf Zusammenhänge mit der Analyse von Perelman für die Rückwärtsversion des Hamiltonschen Ricci-Flusses eingegangen, die für den Beweis der Poincaré-Vermutung eine wichtige Rolle spielte. Das Thema der Gradientenflüsse ist auch zentrales Thema der Monographie von Ambrosio, Gigli und Savaré (2005), die sich aber im wesentlichen auf Gradientenflüsse im Hilbertraumfall konzentriert.

Der dritte Teil des Buches befasst sich mit einer *synthetischen* Behandlung von *Ricci-Krümmung* in nichtglatten metrischen Meßräumen. Für die Definition der Ricci-Krümmung in diesen Räumen werden Charakterisierungen von Ricci-Krümmungsschranken aus dem Riemannschen Fall verwendet. Ein Vorbild für die Entwicklung ist die Behandlung von Schnittkrümmung in nichtglatten Räumen nach der Alexandrov-Methode, bei der Eigenschaften der Winkelsumme in Dreiecken die Grundlage ist. Alexandrov's Definition wie auch der Begriff der Ricci-Krümmung stimmen im glatten Riemannschen Fall mit der klassischen Definition überein. Ein wichtiger Vorteil ist jedoch z.B. ein besseres Stabilitätsverhalten unter Hausdorff-Gromov-Konvergenz. Es werden eine Reihe von Konsequenzen von unteren Ricci-Krümmungsschranken auf geometrische und analytische Eigenschaften behandelt, insbesondere auf logarithmische Sobolev-Ungleichungen, Konzentrationsungleichungen, Poincaré-Ungleichungen sowie auf Wasserstein-Geodätische, d.h. Displacement-Interpolation. Ein Großteil dieser Aussagen geht auf neuere Arbeiten von Lott, McCann, Sturm und Villani zurück. Es gibt eine Fülle von offenen Fragen zu diesem Themenkreis.

Das Buch von Villani beschreibt in eindrucksvoller Weise viele bedeutungsvolle Entwicklungen des Transportproblems und deren Wechselspiel mit zentralen Fragen der Geometrie und partiellen Differentialgleichungen sowie mit der funktionalen Analyse von allgemeinen und wichtigen Ungleichungen. Dieser Zusammenhang eröffnet einen Weg zur Weiterentwicklung dieser Fragestellungen auf nichtglatte Räume (Alexandrov-Räume). Villani's Buch zeigt eine große Perspektive auf. Es ist außerordentlich anregend und beschreibt eine Fülle von wichtigen und relevanten neuen Entwicklungen. Es ist für den Leser eine Herausforderung, bei den vielen Verzweigungen und Darstellungen der Thematik unter verschiedenen Blickwinkeln die Hauptlinie der Entwicklung nicht aus dem Auge zu verlieren. Villanis Buch gibt in hervorragender Weise wesentliche Motivationen, grundlegende Intuition und eine detaillierte Darstellung der teils komplexen Argumente und Konstruktionen. Dieses Buch zu lesen ist ein großer Gewinn. Man kann den Autor zu diesem gelungenen Werk nur beglückwünschen.

Literatur

[Am05] Ambrosio, L., Gigli, N., and Savaré, G. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[Br87] Brenier, Y. Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305*, 19 (1987), 805–805.

[Br89] Brenier, Y. The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids. *J. Amer. Math. Soc. 2*, 2 (1989), 225–255.

[Br91] Brenier, Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math. 44*, 4 (1991), 375–417.

[Rü91] Rüschendorf, L. Fréchet-bounds and their applications. In *Advances in probability distributions with given marginals* (Rome, 1990), vol. 67 of *Math. Appl.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991, pp. 151–187.

[Rü07] Rüschendorf, L. Monge-Kantorovich Transportation Problem and Optimal Couplings. *Jahrbericht der DMV 109*, (2007) 113–137.

[RR90] Rüschendorf, L. and Rachev, S. T. A characterization of random variables with minimum L^2-distance. *J. Multivariate Anal. 32*, 1 (1990), 48–54.

[Ta73] Tanaka, H. An inequality for a functional of probability distributions and its applicaton to Kac's one-dimensional model of a Maxwellian gas. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 27* (1973), 47–52.

[Ta78] Tanaka, H. Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete 46* 1, (1978/79), 67–105.