

Übungen zur Vorlesung

„Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 4

Abgabetermin: 20.11.2017, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1* SSC Netzwerke (4 Punkte)

a) Betrachten Sie alle Reaktionsnetzwerke bei denen jeder Komplex entweder aus einer Spezies oder der leeren Menge besteht.

D.h. für alle $\nu_k \rightarrow \nu'_k \in \mathcal{R}$ gilt $|\nu_k| \in \{0, 1\}$ und $|\nu'_k| \in \{0, 1\}$.

Zeigen Sie: Jedes dieser Netzwerke hat Defizienz 0.

b) Geben Sie ein Netzwerk mit Defizienz größer 0 an bei dem für alle $\nu_k \rightarrow \nu'_k \in \mathcal{R}$ gilt $|\nu_k| \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

Sei $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ ein chemisches Reaktionsnetzwerk der Form aus Aufgabe 1a mit einer einzigen Linkage-Klasse, wobei $\emptyset \notin \mathcal{C}$, d.h. der leere Komplex steht auf keiner Seite einer Reaktion. Dieses Reaktionsnetzwerk folge dem Massenwirkungsgesetz mit Reaktionskonstante κ_k für $k \in \mathcal{R}$.

Weiter sei Y eine Markov-Kette mit Zustandsraum \mathcal{S} mit folgender Dynamik: Startend in Y_0 , springt die Markov-Kette von Zustand s nach t mit Rate κ_k , falls $s \rightarrow t$ die k -te Reaktion in \mathcal{R} ist.

Zeigen Sie:

a) Sei $X_s(t)$ die Anzahl der Moleküle der Sorte $s \in \mathcal{S}$. Dann ist $t \mapsto \sum_{s \in \mathcal{S}} X_s(t)$ eine Konstante.

b) Besitzt Y eine Gleichgewichtsverteilung ν auf \mathcal{S} und ist $N = \sum_{s \in \mathcal{S}} X_s(t)$, so besitzt das Chemische Reaktionsnetzwerk ebenfalls ein Gleichgewicht, nämlich die Multinomialverteilung

$$\mathbf{P}(X_s = x_s, s \in \mathcal{S}) = N! \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{\nu(s)^{x_s}}{x_s!}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ ein chemisches Reaktionsnetzwerk wie in Aufgabe 2, jedoch mit $\emptyset \in \mathcal{C}$. Können Sie die Markov-Kette Y in Aufgabe 2 so modifizieren, dass die Aussage aus 2b) in diesem Fall immer noch gilt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen in Proposition 1.37 (Konvergenz von reskalierten Poisson-Prozessen) auf Seite 15 im Manuskript.