Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 13.11.2017, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei eine i.i.d. Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ mit marginaler Verteilungsfunktion F. Betrachten Sie die zugehörigen Ordnungsstatistiken $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$. Für $\alpha \in (0, 1]$, sei $\hat{q}_n(\alpha) := X_{(\lceil n\alpha \rceil)}$, also ein empirisches α-Quantil. Weiter sei $q(\alpha)$ ein α-Quantil von F. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\hat{q}_n(\alpha) - q(\alpha))$ asymptotisch normalverteilt ist und bestimmen Sie die asymptotische Varianz. Welche Annahmen an F werden dafür benötigt?

Hinweis: Versuchen Sie ein direktes Argument unter Verwendung der verallgemeinerten Inversen $\hat{F}_n^\dagger(\alpha) := \inf\{t \in \mathbb{R} : \hat{F}_n(t) \geq \alpha\}$ der empirischen Verteilungsfunktion $\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(X_i)$. Beachte: $\hat{F}_n^\dagger(\alpha) \leq t \iff \hat{F}_n(t) \geq \alpha$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei eine surjektive Abbildung $\varphi : \Theta \to \Phi$ und ein dominiertes statistisches Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ (d.h. die Elemente von $\mathcal{P}$ sind durch ein σ-endliches Maß μ dominiert). Betrachten Sie die beiden Parametrisierungen $\{f_{\varphi(\theta)} : \theta \in \Theta\}$ und $\{f_\phi : \phi \in \Phi\}$ von $\mathcal{P}$, mit μ-Dichten $f_\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$. Für $x \in \mathcal{X}$, seien $\hat{\Theta}(x) \subseteq \Theta$ und $\hat{\Phi}(x) \subseteq \Phi$ die entsprechenden unter Beobachtung von x erhaltenen Mengen von Maximum-Likelihood-Schätzern in der jeweiligen Parametrisierung. Zeigen Sie, dass dann $\hat{\Phi}(x) = \varphi(\hat{\Theta}(x))$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Unter den Annahmen von Satz 2.11 aus der Vorlesung, definieren Sie $q(\theta, y) = \frac{\partial^2 \log f(\theta, y)}{\partial\theta\partial\theta'}$ und zeigen Sie, dass

$$\hat{I}_n(\hat{\theta}_n) := -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n q(\hat{\theta}_n, Y_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_{\theta_0}} I(\theta_0).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz auch bekannt als "Delta-Methode'.

Satz. *Es sei $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ eine messbare Funktion die im Punkt $\theta \in \mathbb{R}^k$ differenzierbar ist mit Jacobi-Matrix $J_\Phi(\theta)$. Weiter seien S_n und T Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^k$, so dass $\sqrt{n}(S_n - \theta)$ in Verteilung gegen T konvergiert, also $\sqrt{n}(S_n - \theta) \rightsquigarrow T$. Dann gilt die folgende Konvergenz,*

$$\sqrt{n}(\Phi(S_n) - \Phi(\theta)) - J_\Phi(\theta) \cdot \sqrt{n}(S_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \textit{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Insbesondere gilt also

$$\sqrt{n}(\Phi(S_n) - \Phi(\theta)) \rightsquigarrow J_\Phi(\theta) \cdot T.$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-mathematische-statistik-ws-2017-18`