Übungen zur Vorlesung
"Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens"

Blatt 12

Abgabetermin: Freitag, 21.07.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei der Körper K, der von den Flächen $z = 1 - x^2$, $x^2 + y^2 = 1$ sowie der xy-Ebene eingeschlossen wird.

a) Beschreiben Sie kurz die einzelnen Bestandteile des Körpers (Bodenfläche, Seitenfläche, Deckfläche).

b) Berechnen Sie das Volumen von K.

c) Gegeben sei das Vektorfeld $g(x, y, z) = (xy + yz^2, xz + 2xy^2z, 2z - 2xyz^2)$. Berechnen Sie den Fluss ϕ des Vektorfeldes g durch die Randfläche ∂K von innen nach außen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} < 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, dA, \quad \text{wobei } F(x, y, z) = \left(3x^2z, y^2 - 2x, z^3\right)$$

sei und ν die äußere Normale bezeichne.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt mit glattem Rand und äußerer Normale $\nu(x)$, ferner enthalte Ω den Ursprung. Sei $\alpha(x) = \angle(x, \nu(x))$, $x \in \partial\Omega$, der Winkel zwischen dem Ortsvektor x und dem Normalenvektor $\nu(x)$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\cos(\alpha(x))}{\|x\|_2^2} \, dA = 4\pi.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\cos(\alpha(x)) = \langle \frac{x}{\|x\|_2}, \nu(x) \rangle$ und wenden Sie den Satz von Gauß an auf das Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und äußerer Einheitsnormale ν.

a) Zeigen Sie, dass dann für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega u\Delta u + |\operatorname{grad} u|^2 \, dx = \int_{\partial\Omega} u \, \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dA.$$

b) Sei $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ die elektrische Ladungsdichte im Gebiet Ω und $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es nur eine Funktion (elektrostatisches Potential) $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit $\Delta\phi = -4\pi\rho$ auf Ω und $\phi = f$ auf $\partial\Omega$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es zwei solche Funktionen gibt, und betrachten Sie deren Differenz.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-mathe-II-ing-ws-2017`