Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 21.01.2016 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 41 (4 Punkte)
Der Poisson-Prozess aus Beipiel 12.1 kann auch folgendermaßen definiert werden: Ein reellwertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit $X_0 = 0$ heißt Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, wenn gilt:

1. Für $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ist die Familie $(X_{t_i} - X_{t_i - 1})_{i=1,\ldots,n}$ unabhängig.
2. Für $0 \le t_1 < t_2$ ist $X_{t_2} - X_{t_1} \sim Pois(\lambda(t_2 - t_1))$.

Es seien zwei unabhängige Poisson-Prozesse $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ und $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit Intensität $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ gegeben. Zeigen Sie mit obiger Definition, dass der Prozess $(X_t + Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda + \mu$ ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte)
Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Poisson-Prozess. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ keine Doppelsprünge aufweist, d.h. der Poisson-Prozess macht nur Sprünge der Höhe 1. Folgern Sie, dass zwei unabhängige Poisson-Prozesse nie gleichzeitig springen.

Hinweis: Für die erste Behauptung reicht es zu zeigen, dass der Poisson-Prozess nahe der Null keine Doppelsprünge hat. Zeigen Sie dazu $\frac{1}{\varepsilon}P(X_\varepsilon > 1) \to_{\varepsilon\to 0} 0$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)
Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein bei Null reflektierter random walk, d.h. $p_{0,1} = 1$ und für $i \neq 0$ $p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}$. Zeigen Sie, dass $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ positiv rekurrent ist genau dann wenn $p < \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie die stationäre Verteilung.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass eine homogene Markovkette genau dann positiv rekurrent ist, wenn jedes invariante Maß endlich ist, d.h. für ein invariantes Maß π gilt $\sum_{i\in E} \pi_i < \infty$.