

---

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt

Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi

<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016>

---

## Übung 3

**Abgabe: 10.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sei  $N$  ein Poisson-Prozess der Intensität  $\lambda > 0$  mit endlichem Zeithorizont  $T > 0$ . Ferner gelte  $\mathcal{F} = \sigma(N_s | s \leq T)$ . Sei nun  $Q$  ein zweites Maß unter dem  $N$  ein Poisson-Prozess der Intensität  $\tilde{\lambda} > 0$  ist. Zeigen Sie dass  $P$  und  $Q$  äquivalent sind mit

$$\frac{dP}{dQ} = \exp \left( (\tilde{\lambda} - \lambda)T - N_T \ln \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right) \right).$$

Nutzen Sie hierbei aus, dass für  $B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E} [1_B | N_T = k]$$

unter  $P$  und  $Q$  übereinstimmt.

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Gegeben  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , sei  $N$  ein  $Poi(\lambda)$  Prozess. Definiere

$$S_t = N_t - ct, \quad t \leq T, \quad c > 0.$$

Bestimmen Sie ein zu  $P$  äquivalentes Maß  $\tilde{P}$  unter dem  $S$  ein Martingal ist.

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Wir betrachten das Black-Scholes Modell mit den Parametern  $r = 0, \sigma = 0.2, T = 1$ . Seien

$$C(S, K), \quad P(S, K)$$

die Call- bzw. Putpreise in diesem Modell für  $S_0 = S$  und Strike  $K$ . Als  $\Delta_C$  bezeichnen wir die Ableitung des Callpreises nach  $S$  im Punkt  $S_0$ . Entsprechend hat die Aktie  $S$  selber einen  $\Delta$  Wert von 1. Betrachten Sie nun ein Portfolio bestehend aus Positionen in Aktie und Calloptionen. Für  $S_0 = K = 1$ , bestimmen Sie wie viele Aktien gekauft werden müssen um eine Position aus 10 Calloptionen  $\Delta$  neutral zu machen ( $\Delta = 0$ ), wobei das  $\Delta$  des Portfolios gegeben ist als die Summe der einzelnen  $\Delta$ . Wiederholen Sie diesen Schritt für den Fall wo anstelle von Calloptionen nur Putoptionen betrachtet werden und im Portfolio 10 Putoptionen sind.