

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für Studierende der Informatik“

<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016>

Sommersemester 2016, Blatt 10

Abgabetermin: 04.07.2016, zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)

Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 37 (Hausaufgabenabgabe und Prüfungsausgang) (3 Punkte)

Statistiken zeigen, dass 50% der Studenten die Hausaufgaben zu einer Vorlesung gewissenhaft bearbeiten. Ferner ist bekannt, dass von 40 Studenten, die die Klausur nicht bestehen, lediglich 2 die Hausaufgaben bearbeitet haben, während von 20 Studenten, die die Hausaufgaben rechneten nur eine(r) durchfiel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man die Prüfung nicht besteht, falls man nicht regelmäßig die Hausaufgaben bearbeitet hat.

Aufgabe 38 (Konjugierte Verteilung der Normalverteilung) (4 Punkte)

Es sei $M \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und es sei $X|M \sim \mathcal{N}(M, \tau^2)$ (also X ist, gegeben M , normalverteilt). Zeigen Sie nun, dass die bedingte Verteilung von M gegeben X erneut normalverteilt ist und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

Hinweis: Berechnen Sie die gesuchte Dichte proportional und verwenden Sie die Substitutionen

$$\mu' := \frac{x\sigma^2 + \mu\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \quad \text{und} \quad \sigma'^2 := \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Aufgabe 39 (Warteschlange) (2 + 2 + 2 Punkte)

Wir möchten die Warteschlange an Aufträgen, die ein Prozessor bearbeitet modellieren. Hierfür sei bekannt, dass in einem Zeitschritt entweder ein Auftrag beendet wird oder ein neuer hinzu kommt oder nichts passiert. Für $p, q \in [0, 1]$ mit $p + q \leq 1$ sei p die Wahrscheinlichkeit für die Beendigung eines Auftrags und q die Wahrscheinlichkeit, dass ein neuer Auftrag hinzu kommt.

- Prüfen Sie formal, ob die Länge der Warteschlange eine Markovkette ist.
- Stellen Sie den Übergangsgraph für die Länge der Warteschlange dar und geben Sie die Übergangsmatrix an.
- Sei nun zu Beginn ein Auftrag in der Warteschlange. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p und q), dass irgendwann einmal kein einziger Auftrag in der Warteschlange ist.

Hinweis zu (c): Vergleichen Sie die Markovkette mit einem Ruinproblem.

Schon der gesunde Menschenverstand sagt, dass für $p > q$ diese Wahrscheinlichkeit 1 sein sollte.

Aufgabe 40 (Wettersvorhersage)

(1 + 2 Punkte)

Es bezeichne W_n das Wetter am Tag n mit Zuständen R für Regen und S für Sonne. Angenommen die Wahrscheinlichkeit, dass es heute regnet, falls es die letzten beiden Tage nicht geregnet hat, beträgt 0.3, jedoch 0.6 falls es an mindestens einem der letzten beiden Tage geregnet hat. W_n ist demnach keine Markovkette, wohl aber das Wetter für die letzten beiden Tage $X_n = (W_{n-1}, W_n)$ mit Zuständen $\{RR, RS, SR, SS\}$.

- (a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix von X .
- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es am Mittwoch regnet, unter der Bedingung, dass es weder am Sonntag noch am Montag davor regnete.